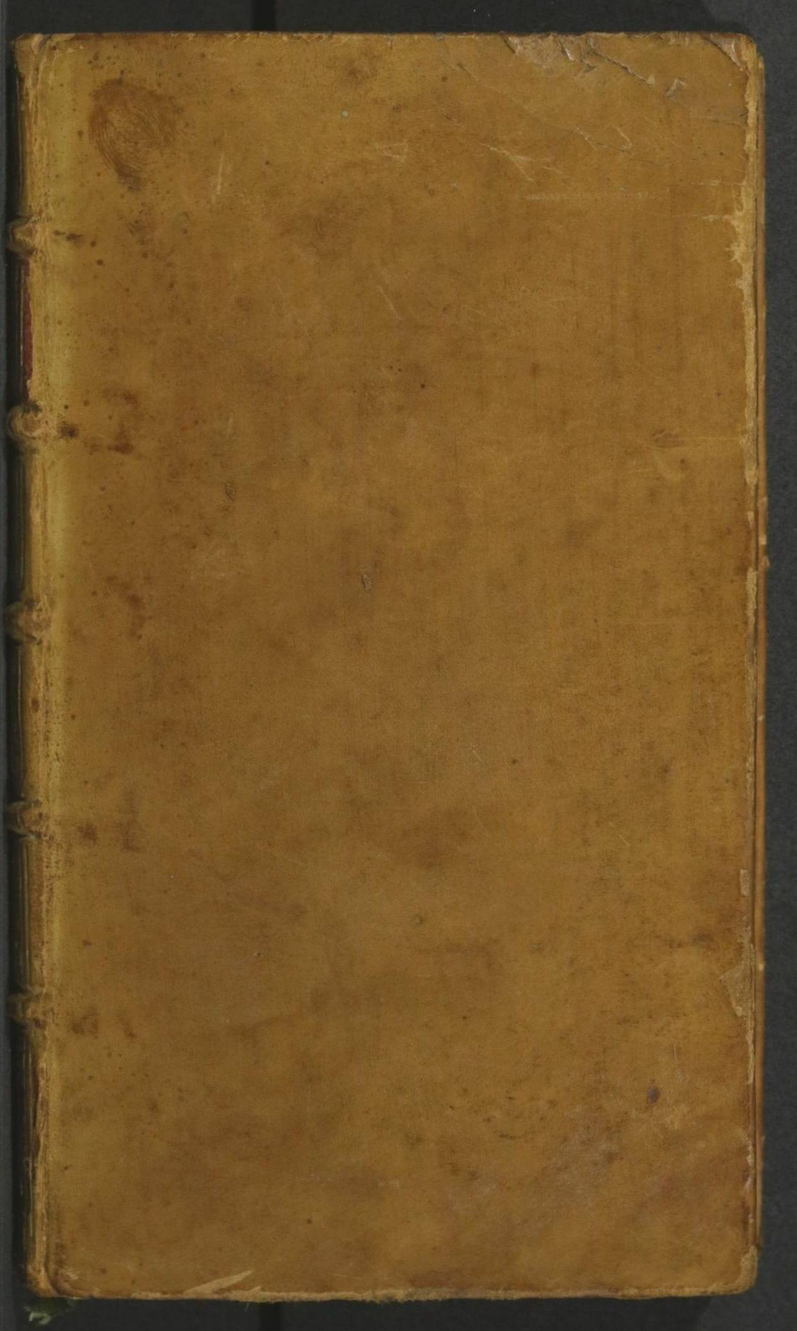
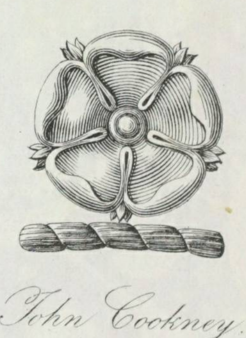



John Cookney.

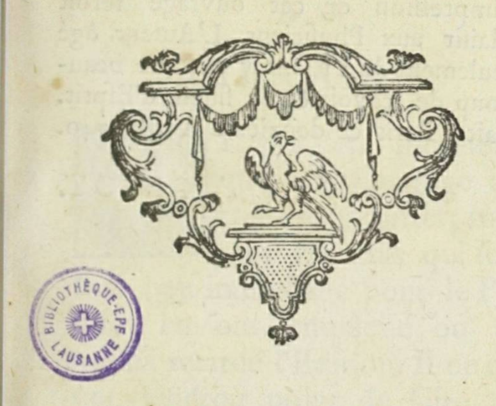


Don de M. le prof. Bridel.
avril 1899.

par Jean Philippe Loys de Cheseaux

cf. Wolf, Biographien zur Kulturgesch. der Schweiz III p. 243

ESSAIS DE PHYSIQUE.



A PARIS;

Chez DURAND, rue S. Jacques, à S. Landry & au Griffon.

1743.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

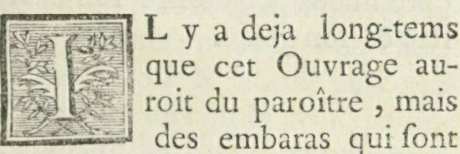
APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier, un Manuſcrit intitulé, *Eſſai de Dynamique &c.* j'ai crû que l'impreſſion de cet ouvrage feroit plaiſir aux Phyſiciens. L'Auteur âgé ſeulement de 21 ans y marque beaucoup de ſçavoir & de fineſſe d'Eſprit. Fait à Paris ce douziéme Avril 1740.

PITOT.



AVERTISSEMENT
DU
LIBRAIRE.



IL y a deja long-tems que cet Ouvrage auroit du paroître, mais des embaras qui ſont fort peu intereſſans pour le Public, en ont empêché ou du moins retardé l'Edition. Il ne me conviendroit point de faire ici l'éloge de l'Ouvrage & de tacher de prevenir en ſa faveur les Lecteurs; je prendrai ſeulement la liberté d'avertir que ces Eſſais ſont d'un jeune Auteur, qui n'avoit pas vingt ans, quand il les a finis, que j'ai eu beaucoup de peine

à vaincre sa modestie pour l'engager à me permettre de le nommer, & que c'est l'ouvrage de Monsieur Jean-Paul de Louis, Seigneur de Chésaux, petit-fils du célébre Monsieur de Crouzas. Si cet ouvrage réussit, l'Auteur est en état d'en donner d'autres, qui feront peut-être encore mieux connoître son habileté & son génie.



ESSAI DE DYNAMIQUE,

SUR LA MANIERE

d'expliquer & de démontrer les expériences nouvelles du choc des Corps & autres de cette eſpece, ſuivant le principe ordinaire des Forces Mouvantes proportionnelles aux produits des maſſes des Corps par leurs vîteſſes.

I. *Remarques générales ſur les Forces, ſur les Preſſions & ſur les Réſiſtances.*



JE ſuppoſe déja connus les premiers principes de Phyſique & de Méchanique ſur le mouvement des corps, ſoit ſimple, ſoit composé, ſoit unifor-

me ou varié, sur la force des leviers ; sur le centre de gravité & quelques autres semblables. Je me contenterai de les indiquer dans les endroits où j'en aurai besoin, en suivant l'Abregé de Physique de M. *s'Gravesande*, intitulé *Philosophiæ Nevvtonianæ Institutiones*, imprimé à *Leyde* en 1728, *in* 8°. Tels sont les suivans dont l'usage sera le plus fréquent dans la suite.

2. Les espaces finis x ou infiniment petits dx, parcourus par différens corps pendant des tems finis t ou infiniment petits dt avec des vîtesses uniformes finies u, sont égaux aux produits de ces vîtesses par les tems. *Phil. Nevv. Inst.* n°. 59. Ainsi $x = ut$, $dx = udt$, & même $ddx = dudt$, & par conséquent $dt = \frac{dx}{u}$ & $u = \frac{dx}{dt}$

3. Si les vîtesses v de ces corps sont variables ou changeantes, étant d'abord nulles au commencement des tems t & augmentant ensuite uniformément pendant la durée de ces tems jusques à devenir égales aux vîtesses uniformes u du n°. *precedent* ; les espaces s parcourus par ces mêmes corps, pendant les mêmes tems t avec de tel-

les vîtesses uniformément accélérées v seront deux fois moindres que les espaces x parcourus avec les vîtesses uniformes u. (*Phil. Nevv. Inst.* n°. 188.) Ainsi s sera $= \frac{1}{2} x$ ou $2s = x = vt = ut$, & $t = \frac{2s}{v}$

4. Les mêmes espaces seront encore proportionnels aux quarrés des vîtesses u ou des tems t. *Phil. Nevvt. Instit.* n°. 186. pourvû que l'accélération soit uniforme & égale pour ces différens corps, comme il arrive à tous les corps tombans ou descendans par la force de la gravité. Ainsi s sera toujours proportionnel à vv ou à tt.

5. Les vîtesses étant uniformément accélérées, seront encore proportionnelles aux tems t, pendant lesquels durent leurs accélérations, (*Phil. Newt. Instit.* n°. 84.) D'où il suit que si dv exprime chaque degré infiniment petit de vîtesse, qui s'acquiert par l'accélération pendant chaque instant dt, on aura cette proportion $dv. dt :: v. t.$ & par conséquent $\frac{dv}{dt} = \frac{v}{t}$; & puisque (n°. 3.) $t = \frac{2s}{v}$, on aura enfin $\frac{dv}{dt} = \frac{vv}{2s}$

= (par le n°. précédent,) à une quantité constante.

6. Si un corps se meut avec une vîtesse finie v continuellement variée, soit en augmentant ou en diminuant, cette vîtesse v pourra être considérée comme uniforme pendant la durée de chaque instant dt que ce corps employe à parcourir des espaces infiniment petits dx & par conséquent ces instans dt seront $= \frac{dx}{v}$ suivant la régle du n°. 2.

7. Un corps en repos n'a absolument aucune *force* par laquelle il puisse jamais produire du mouvement dans d'autres corps.

8. Un corps qui n'a qu'une vîtesse infiniment petite a une *force* infiniment petite, capable de *produire* dans d'autres corps un mouvement infiniment petit, ou de *détruire* un pareil mouvement dans les mêmes corps.

9. Cette force paroît être de la même nature ou semblable à celle que la gravité communique à tous les corps dans des tems infiniment petits.

10. Un corps infiniment petit qui se meut avec une vîtesse finie a une *force*

infiniment petite, du même ordre, ou du même genre que celle du corps fini du n°. 8.

11. Un corps fini qui se meut avec une vîtesse finie a une *force* finie, & peut produire ou détruire un mouvement fini, ou une quantité de mouvement finie, ou une force finie dans d'autres corps; & par conséquent sa force est infinie en comparaison de la force des corps des n°. 8 & 10.

12. La gravité ou pésanteur communique à tous les corps quels qu'ils soient des dégrés de vîtesse infiniment petits & égaux *d v* dans des tems aussi infiniment petits, ou des instans égaux *d t* & de même des dégrés de vîtesse unis & égaux *v* pendant des tems finis & égaux *t* (suivant les loix des mouvemens uniformément accélérés, rapportées dans les n°. 2. & suivans;) en sorte qu'elle agit sur tous ces corps par une action *continue* & *uniforme*, & qu'elle leur communique pendant les mêmes tems égaux finis ou infiniment petits des forces finies *f* ou infiniment petites *d f* proportionnelles à leur masses, &c. *Phil. Nevvt. instit.* n°. 87. & 89.

13. Soit donc ſuppoſé un corps péſant *P* (*Fig.* 1.) poſé ſur un plan *A B*, qui le ſoutient. Il s'enſuit qu'à chaque inſtant égal *d t*, la gravité communique un dégré infiniment petit de vîteſſe *d v* ou de force *d f* à ce corps *P*, & qu'à chaque inſtant égal *d t* ce dégré infiniment petit de vîteſſe *d v*, ou de force *d f*, eſt anéanti ou détruit par l'oppoſition du plan.

14. Le corps *P* eſt conçû comme agiſſant *continuement* & *uniformément* avec une force infiniment petite & égale *d f*, (n°. 12.) & l'action de ce corps conçûe de cette maniere, eſt appellée *Preſſion.*

15. Le plan *A B* eſt auſſi conçû comme agiſſant *continuement* & *uniformément* ſur le corps *P*; c'eſt-à-dire, comme détruiſant à chaque inſtant égal *d t* une force infiniment petite & égale *df* ou comme réſiſtant à la *preſſion* de ce corps avec une force qu'on nomme *réſiſtance*, laquelle doit être préciſément égale à cette preſſion.

16. Soit encore le même plan *A B*, (*Figure* 2.)auquel on ait ſuſpendu le même corps péſant *P*, il eſt évident que ce corps le tirera vers le bas avec une

force infiniment petite, (n°. 8.) continuë & uniforme qu'on peut appeller *traction*, laquelle sera précisément égale à la pression du cas précédent : de même que la résistance du plan *A B* dans ces deux cas.

17. Il est clair que la pression ou la traction du corps *P*, à l'égard de ce plan est la même chose que le *poids* de ce corps ; & par conséquent que cette force qu'on nomme *poids* des corps, est la même que cette force infiniment petite que la gravité leur communique à chaque instant, en leur donnant dans ces instans des vîtesses infiniment petites, (n°. 9.)

18. Il paroît même par le n°. 7. que le poids de ces corps, leurs pressions, ou leurs tractions, ne peuvent être conçûs comme des principes actifs, ou capables de produire quelques effets ; si l'on n'y joint l'idée de vîtesse.

19. La pression ou traction du corps *P* s'appelle encore *action* de ce corps sur le plan *A B*, & la résistance de ce plan *réaction* de ce plan à l'égard du corps *P*.

20. On voit par les n° 13. & 19. la vérité de ce principe de Physique. Qu'à

chaque action répond une réaction, & que cette réaction lui est précisément égale. (*Phil. Nevvt. Instit.* n°. 175.)

21. Les termes de *Poids*, de *Pression*, & de *Résistance*, sont des termes vagues ausquels on donne divers sens, suivant les différentes occasions. Quelquefois, on les prend pour cette force déterminée & infiniment petite df, que la gravité communique à chaque instant dt à un même corps, ou que ce corps éxerce de même à chaque instant sur quelque obstacle (comme le corps P sur le plan AB,) ou que cet obstacle détruit à chaque instant dans ce corps; & c'est dans ce sens, ou suivant cette maniere de considérer que l'on compare ces pressions & ces résistances entr'elles.

22. Quelquefois on les conçoit comme continues ou appliquées pendant un certain tems, ce qui sert à comparer leurs effets, comme on le verra dans la suite, & pour lors on fait ordinairement attention à la somme de toutes les forces infiniment petite df, qui ont été communiquées par les corps ou détruites par les obstacles pendant la durée de ces corps.

23. Pour réduire les principes des n°. précédens à des égalités algébriques, je supposerai toujours comme ci-devant. 1°. Tous les instans ou momens infiniment petits, égaux entre eux, ou constans, & $= dt$. 2°. Les dégrés infiniment petits de vîtesse, communiqués par la gravité aussi constans $= dv$; & par consequent. 3°. Les dégrés infiniment petits de force communiqués de même par elle à tous les corps $= df =$ (n°. 12. & 18.) (en appellant m les masses ou quantités de matiere de ces corps) $m\,dv$. Enfin, 4°. je nommerai p le poids, ou la pression ou traction instantanée de ces corps, & r la résistance aussi instantanée du plan AB, ou de tout autre obstacle contre cette pression, & l'on aura ensuite ces 4 egalités, sçavoir;

1°. $df = m\,dv$. (n°. 12. & 18.)

2°. $p = r$, (n°. 15. & 20.)

3°. $pdt = rdt = df = mdv$, (n°. 13.)

4°. $r = p = \frac{df}{dt} = \frac{m\,dv}{dt}$,

24. On multiplie dans la troisiéme égalité la pression p ou la résistance r par l'instant dt (quoique cet instant soit supposé constant) parce que les

effets de cette pression & de cette résistance, ou les petites forces df, produites ou détruites par elles, sont (toutes choses d'ailleurs égales) proportionnelles aux tems, soit finis, soit infiniment petits pendant lesquels ces pressions, &c. durent & continuent à exercer leur action. (*Phil. Nevvt. Instit.* n°. 315.) *Voyez encore ci-après*, (n°. 25.) Il semble qu'on peut très-justement conclure du n°. *précédent*, que la somme de tous ces effets ou de toutes ces petites forces df produites, ou détruites pendant un tems fini t, est en raison composée de la longueur de ce tems & de la grandeur de ces pressions ou résistances; c'est-à-dire, que $sdf = smdv = pt = rt = f = mv$.

II. *De l'Equilibre des Pressions, & de la maniere de les comparer.*

26. On voit par les n°. 10. & 14. la vérité de cette proposition connuë dans la *Méchanique*; qu'il n'y a aucune *force mouvante* prise dans le sens du n°. 6. quelque petite qu'elle soit, qui ne puisse vaincre la plus grande *pression*, ou rendre nuls les effets de cette

pression pendant quelques momens. (*Phil. Nevvt. Instit.* n°. 290.) C'est-à-dire, qu'il n'y a aucun corps fini quelque petit qu'il soit, mû avec une vîtesse finie, dont la force ne puisse vaincre ou détruire celle d'un corps fini, quelque grand qu'il soit, mû avec une vîtesse infiniment petite.

27. Mais si ce premier corps devient infiniment petit, & conserve sa vîtesse finie, sa force deviendra infiniment petite, (n°. 10.) & pourra par conséquent être détruite par celle du second corps, (laquelle, (n°. 10.) est du même ordre,) ou faire *équilibre* avec elle, ou la détruire réciproquement suivant leurs différentes proportions.

28. Si la gravité communiquoit à différens corps des dégrés inégaux infiniment petits de vîtesse dv dans les mêmes instans dt, il est évident que le poids p ou (n°. 17.) la force des pressions, ou tractions, qu'ils pourroient exercer, ne dépendroit pas seulement de leurs masses, mais encore de la grandeur de ces dégrés infiniment petits de vîtesse, qu'ils reçoivent dans ces instans égaux. (Voyez *Nevvt. Phil. Nat. Princ. Mathem.* lib. II. Prop. & comp.

avec *Instit. Phil. Nevvt.* (n°. 228.)

29. J'appellerai dans la suite, *intensité* de la gravité, dans les corps pésans, la grandeur de la force qu'elle leur communique dans ces mêmes instans égaux. (Voyez *l'Essai sur le Mouvement de l'Air dans la propagation des Sons.* Art. X. n°. 110.)

30. On peut par le moyen du principe du (n°. 28.) joint à la théorie des mouvemens composés rendre raison de l'équilibre des poids d'une balance, & expliquer, (pour ainsi dire,) *à priori* la cause de cet équilibre, d'une maniere plus satisfaisante que plusieurs Autheurs ne l'ont fait jusques-ici, en considérant ces poids comme dans un mouvement actuel : ce que l'on peut voir en détail dans l'*Hist. de l'Académie Royale des Sciences*, de l'année 1725.

31. Soit un levier ou une verge infléxible *AB*, (*Figure* 3.) supposée sans pesanteur, & ayant ses deux bras *A B*, *B M*, inégaux, & deux corps pesans *P* & *Q* appliqués ou suspendus aux extrémités *A* & *B* de ces bras, & desquels les masses soyent en proportion réciproque des longueurs de ces bras.

32. 1°. Les extrémités *A* & *B* de ce levier sont poussées ou mûes à chaque instant *d t* vers le centre de la terre avec des vîtesses infiniment petites égales *d v*, mais avec des forces infiniment petites *d f* inégales dans la même proportion que les masses des corps *P* & *Q* (n°. 12.) Mais comme la Théorie des mouvemens composés demande que les vîtesses soient en même raison que les forces, il faut, par quelque supposition, rendre les masses égales, & les vîtesses inégales, sans que les forces changent ; ce qui se fait, 2°. En substituant à l'un des corps *Q* un autre corps *R*, (*Figure* 4.) égal en masse au corps *P*, & dont la vîtesse infiniment petite, soit diminuée dans la même proportion que sa masse est augmentée ; car alors par le principe précédent ; (n°. 28. & 29.) l'intensité de la gravité dans le corps substitué *R*, sera égale à son intensité naturelle dans le corps *Q* ; ou ce qui est la même chose, le poids de ce corps *R*, sera égal au poids du corps *Q* ; & par conséquent l'extrémité *B* de ce levier, sera tirée à chaque instant avec la même force qu'auparavant, & avec une vîtesse in-

finiment petite, qui sera à la vîtesse infiniment petite, dont l'autre extrémité *A* est tirée, dans la même proportion que le poids du corps *R* au poids du corps *P*, ou comme le poids du corps *Q* au poids du corps *P*.

33. Cette supposition ou substitution est très-naturelle, & se justifie même par une expérience facile. Que l'on fasse passer la corde *B l*, (*Figure* 5,) qui suspendoit le corps *R*, sur une poulie *L*, & qu'à son extrémité *r* on attache le corps *R*, dont on vient de parler, égal en masse au corps *P*; & que ce corps *R* soit posé sur un plan incliné *M N*, dont la hauteur *N O* soit à la longueur *M N*, comme la masse du corps *Q* à celle du corps *R*, ou du corps *P*, sur lequel plan ce corps *R* puisse se mouvoir facilement. On sçait par la Méchanique; 1°. Que les dégrés infiniment petits de vîtesse, que la pésanteur communique à chaque instant *d t*, au corps *R*, suivant la direction du plan *M N*, sont aux dégrés infiniment petits de vîtesse, qu'elle communique dans les mêmes instans au corps *P*, dans la même proportion que la hauhauteur *N O* est à la longueur *M N*;

ou que la masse du corps *Q* est à celle du corps *R*, ou du corps *P*. 2°. Que la force avec laquelle ce corps *R*, ainsi suspendu à la corde oblique *L r*, & posé sur le plan *M N*, tire l'extrémité *B* du bras de levier *M B* est égale à celle du corps *Q*, suspendu à la corde perpendiculaire *B l*, (*Figure* 3.) conformément au principe précédent (n°. 28.)

34. Les deux extrémités *A* & *B* de ce levier *A M B*, seront donc tirées avec des forces égales & des vîtesses proportionnelles aux forces des corps *P* & *R*, ou aux poids des corps *P* & *Q*; d'où il suit que l'on pourra déterminer aisément par la Théorie des mouvemens composés, la situation du point d'appui *M*, la force qui doit lui être appliquée en sens contraire: pour qu'il puisse résister à celle des deux corps *P* & *R*, ou *P* & *Q*; & la direction de cette force.

35. Supposés que les directions perpendiculaires des cordes *A P* & *B R*; (*Figure* 6.) soient prolongées jusques au centre de la terre *T*, de même que la perpendiculaire *MT*, qui répresente la direction de la force de l'appui, laquelle doit concourir au même point *T*,

que celles des deux forces *AP*, & *BR*. 2°. La situation du point d'appui *M*, doit être telle que, 1. les sinus des angles *ATM*, & *BTM*, formés par les directions de chacune des forces opposées *A* & *B*, avec celle de l'appui *M*, soient réciproquement proportionnelles à ces forces. 2. Que le sinus de l'angle total *ATB*, formé par les directions des deux forces entr'elles, soit au sinus de l'un des deux angles partiaux *ATM*, formé par la direction de l'une de ces forces *A* avec la direction du point d'appui comme la force qui doit être appliquée à ce point d'appui *M*, est à l'autre force *B*.

36. Or, il est évident que les bras du levier *AM*, & *BM*, & la longueur entiere *AB* sont en même raison que les sinus de ces trois angles, *ATM*, *BTB*, & *ATB*, à cause de leur petitesse extrême, en comparaison du rayon *TM*, auquel ils sont perpendiculaires; d'où il suit, que pour mettre ce levier *AB*, (aux extrémités duquel sont suspendus les poids inégaux *P* & *R*, ou *RQ*) en équilibre; de maniere que l'un des deux ne l'emporte point sur l'autre, en tirant en bas l'extrémi-

té

té à laquelle il est suspendu : il faut arrêter ce levier, ou le soûtenir en un point *M*, qui partage sa longueur *AB*, en deux parties *A M* & *B M* réciproquement proportionnelles aux forces des corps *P* & *Q*, dont il est chargé ; & 2°. Appliquer à ce point *M* une autre force qui soit à celle de l'un des corps *P* comme la longueur entiere du levier *A B* à celle de son autre partie *B M*, d'où l'on conclura facilement que cette force doit étre égale à celle d'un corps, qui étant égal en masse au corps *P*, tireroit à chaque instant ce point *M* de bas en haut avec une vîtesse infiniment petite, égale à la somme des vîtesses des corps *P* & *R*. Or, l'on trouvera par tout ce qui a été dit ci-devant, (n°. 28.) que cette force est la même que celle d'un corps, qui tirant aussi à chaque instant ce point *M* avec une vîtesse infiniment petite, égale à celle du corps *P* seroit égal en masse à la somme des deux corps *P* & *Q*. D'où il suit enfin que cette force du point d'appui *M*, qu'on appelle autrement sa *charge*, sera égale à la somme des poids de ces deux corps.

37. Cette méthode, ou ce principe

s'applique beaucoup plus aisément aux leviers, tirés par des forces dont les directions sont obliques, & à toutes les autres puissances méchaniques ; comme le plan incliné, le coin, &c. & même à l'équilibre des corps fluïdes, ou à l'Hydrostatique : (Voyez *la Nouvelle Méchanique de M. Varignon.*) Il paroît beaucoup mieux convenir à la nature de toute espece d'équilibre, dans lequel les forces ou pressions sont sans mouvement, que les principes ordinaires, où l'on est obligé de les considérer comme mouvantes.

38. Un de ces principes, porte ; » Que les pressions font d'autant plus « d'effort dans les mêmes instans » égaux, non-seulement que leurs in- » tensités sont plus grandes, mais en- » core que les points ou les superficies » ausquelles on les applique immédia- » tement, sont mûës ou transportées » avec plus de vîtesse. »

39. Mais ce principe, si je l'ose dire, ne paroît nullement vrai ; Car premierement, si le plan *A B*, de la *Figure* 1. sur lequel est posé le corps pésant ou ou pressant *P*, est mis en mouvement de bas en haut, ou autrement par une

force quelconque : On ne voit aucune raison pour laquelle la pression du corps *P* sur ce plan, & le dégré que cette pression détruira dans la force qui meut le plan, doive augmenter absolument ; soit que le plan soit mis en mouvement, au lieu d'être simplement suspendu en repos ; soit qu'il soit mû plus ou moins vîte. Car si l'effet de cette pression contre la force mouvante, augmentoit ou diminuoit en même proportion que la vîtesse du plan ; il s'ensuivroit, que si cette vîtesse étant d'abord finie, ou d'une grandeur déterminée, venoit ensuite à diminuer par dégrés, jusques à devenir infiniment petite ; l'effet de la pression du corps *P* à l'égard de la force mouvante devant diminuer dans la même proportion, seroit infiniment plus petit, lorsque le plan seroit simplement suspendu en repos, que lorsqu'il seroit mis en mouvement, ou infiniment plus grand dans ce dernier cas, que dans l'autre ; ce qui paroît contraire à l'expérience.

40. Mais on doit bien prendre garde de distinguer ici l'effet de la pression du corps *P*, d'avec l'effet ou la résis-

tance de la force d'*inertie* de ce même corps, qui ſelon l'opinion du plus grand nombre des Phyſiciens, eſt effectivement proportionnel à la vîteſſe avec laquelle il eſt mis en mouvement. 2°. Lorſqu'il s'agit de comparer des preſſions inégales, (cauſées par des corps égaux en maſſe,) leſquelles ne different que par les dégrés infiniment petits de vîteſſe que ces corps reçoivent à chaque inſtant; il paroît qu'il faudra toujours une plus grande force pour tranſporter dans un inſtant égal un de ces corps ou une de ces preſſions avec une plus grande vîteſſe finie & dans un eſpace infiniment petit plus long que celui où l'on tranſportera l'autre corps ou l'autre preſſion. Cette force néceſſaire, pour le tranſport de l'une ou de l'autre de ces preſſions, ſera infiniment plus grande que ces preſſions mêmes: (n°. 26.) & par conſéquent d'un ordre différent; & l'on ne voit abſolument aucune liaiſon, aucun rapport néceſſaire entre l'augmentation ou diminution de cette force finie, avec celle de la preſſion, ou des efforts ou effets de cette preſſion, leſquels ſuivant le principe cité, devroient être

proportionnels à la grandeur de cette force finie. Il semble que l'on pourroit dire avec autant de raison, que si cette pression ou ses effets viennent à augmenter la force finie qui la transporteroit dans le même instant à la même distance infiniment petite, augmenteroit dans la même proportion ; ce que personne n'a jamais supposé.

III. *De la proportion des résistances instantanées des ressorts & des fibres, suivant leurs différentes roideurs ou forces, longueurs, &c.*

41. On appelle *ressort*, tout corps qui après avoir été plié ou comprimé, se rétablit de lui-même, ou à peu près ou exactement, dans le même état où il étoit avant d'avoir été comprimé.

42. On l'appelle *ressort parfait*, s'il se rétablit précisément avec la même force dont il a été comprimé & *imparfait*, si c'est avec une force moindre ; sur quoi il est à propos de remarquer, qu'un tel corps ou ressort ne se rétablit jamais avec une force plus grande que celle qui l'a bandé, comme on le verra démontré dans le (n°. 136.)

43. Soit un corps *R* (*Figure* 7.) qui puisse être comprimé dans le sens de la ligne *c d.* J'appellerai *ouverture naturelle* de ce ressort, celle qu'il occupe ordinairement lorsqu'il est libre ; & *ouverture diminuée*, celle où il se ttouve réduit par une pression quelconque comme dans la *Figure* 8. Ces ouvertures se mésurent par la longueur des lignes *c d.* Je nommerai encore la ligne *a b* , *étendue* de ce même ressort.

44. Des ressorts sont dits *semblables*, lorsqu'étant comprimés par des pressions ou forces , proportionnelles à leurs plus grandes roideurs , leurs ouvertures diminuées sont proportionnelles à leurs ouvertures naturelles , ou lorsqu'ils opposent des résistances proportionnelles à leurs roideurs, aux forces qui les compriment de quantités proportionnelles à leurs ouvertures naturelles.

45. Il est clair que si leurs ouvertures diminuées ausquelles ils se trouvent réduits par des pressions égales sont proportionnelles à leurs ouvertures naturelles , ces ressorts seront *égaux* en *force* , ou en *roideur*, quelles que soient d'ailleurs leurs étenduës.

46. Un assemblage de ressorts posés successivement les uns à côté des autres, soit dans le sens de leurs lignes d'ouverture, comme dans la *Figure* 9. soit dans le sens de leurs lignes d'étenduë, comme dans la *Figure* 10. s'appelle une *suite* de ressorts ; celui de la *Fig.* 9. est une *suite de la premiere espece*, & celui de la *Figure* 10. une *suite de la seconde espece.*

47. On suppose ordinairement tous les ressorts d'une même suite égaux en roideur & ayant leurs ouvertures naturelles, & leurs étenduës toutes égales.

48. Des suites de ressorts de même espece, sont encore nommées *semblables*, lorsque les ressorts égaux qui composent une de ces suites, sont *semblables*, (n°. 44.) aux ressorts égaux qui composent une autre suite.

49. On peut encore appliquer aux suites de ressorts, les termes d'*ouverture naturelle* ou *diminuée*, & d'*étendue*, dans le même sens qu'on les applique aux ressorts mêmes. L'*ouverture C D*, (*Figure* 9.) d'une suite, est nommée plus ordinairement sa longueur.

50. Soit le corps pésant *P*, de la *Figure* 1. posé non sur le plan *A B*,

comme dans le n°. 13. mais sur un ressort *M*, dont l'ouverture naturelle, lorsqu'il est libre, (n°. 43.) soit égale à la ligne *C D*, de la *Figure* 11. & que ce ressort étant posé lui-même sur le plan *A B* soit réduit à l'ouverture diminuée *c d*, (*Figure* 12.), par la pression du corps *P*.

51. Il est évident, 1°. que la pésanteur agira précisément de la même maniersur le corps *P* dans le cas présent, que dans celui des n°. 13. 14. & 15 sur le plan *A B*. 2°, Que l'ouverture diminuée *c d*, de ce ressort résiste *uniformément* & continuement à la pression du corps *P*; c'est-à-dire, qu'il détruit à chaque moment infiniment petit, ou instant égal *d t* des forces *d f* infiniment petites égales entr'elles, & à celles que la pésanteur communique dans les mêmes instans à ce corps *P*; & par conséquent, que la résistance de ce ressort est précisément égale à la pression de ce corps. 3°. Que le plan *A B* soûtient non-seulement le ressort *M*: mais encore le corps *P*, & souffre, pour ainsi dire, encore une pression égale au poids de ce corps; par l'entremise du ressort *M*, (dont le poids est

supposé

supposé nul,) & qu'il résiste à cette pression avec une force *uniforme* & *continue* qui lui est précisément égale, mais qui est conçûe comme agissant en sens contraire, ou de bas en haut ; d'où il suit :

52. 4°. Que le ressort *M* peut être conçu comme comprimé par deux forces contraires égales entr'elles, & au poids du corps *P*, l'une desquelles est *l'action* du corps *P*, (no. 19.) sur ce ressort *M* ; (& par son entremise sur le plan *AB*) & l'autre, la réaction du plan *AB* contre le ressort *M* (& par son entremise contre le corps *P*.)

53. Si le même ressort *M* étoit placé entre deux plans *AB*, *CD* (*Fig.* 13.) qui le comprimassent des deux côtés avec des forces égales, par le moyen de deux poids *R* & *Q* égaux chacun au poids *P* des *numéros précédens*, on voit encore, 1°. Que ce ressort *M*, ainsi placé, seroit précisément autant comprimé que dans le cas de la *figure* 11. ou que son ouverture diminuée seroit égale dans ces deux cas ; parce que le corps *R* agit précisément avec la même force, sur ce ressort *M* (par le moyen du plan C *D*) & par l'entremise de ce

ressort, sur le plan *A B* ; ou parce que son action sur ce ressort & sur ce plan est précisément la même ; tout comme la pression du plan *A B*, causée par la traction du poids *Q*, répond aussi parfaitement à la résistance ou réaction de ce même plan dans les *numeros précédens.*

54. Soit un fibre *FG*, (*fig.* 14.) attachée par son extrémité supérieure *F*, au plan *A B*, & tirée par l'inférieure *G*, par un corps pésant *P*, qui la tende par la force de son poids, en l'allongeant d'une certaine quantité *c d* au-delà de sa longueur ordinaire ; supposée égale à *Fc*. On prouvera par des raisonnemens semblables aux précédens, que la résistance de la fibre *FG* à la traction du corps *P*, est égale à la force de cette traction, ou au poids du corps *P*.

55. 2°. Que le plan *AB* souffre aussi par l'entremise de la fibre *FG*, une traction égale à celle de la fibre *FG*, ou au poids du corps *P* & qu'il résiste à cette traction avec une force égale à ce poids, laquelle on appelle, (n°. 19.) *réaction* de ce plan, de même que la résistance de la fibre est aussi nommée

réaction de cette fibre , &c.

56. 3°. Que cette même fibre *F G*, peut être conçûe comme tirée ou tenduë par deux forces contraires égales entr'elles, & au poids du corps *P*, l'une desquelles est l'*action* de ce corps, & l'autre la *réaction* du plan *A B*.

57. 4°. Que cette fibre sera encore tenduë d'une force égale ou allongée d'une même quantité *c d* dans le cas de la *figure* 15. où elle est tirée par deux corps *R* & *Q* égaux chacun en poids aux corps *P*, de la *figure* 14. l'*action* du corps *R* répondant (si l'on veut) à celle du corps *P*, & l'action du corps *Q* faisant le même effet que la réaction du plan *AB*.

58. Enfin, le ressort *M*, & la fibre *F G*, peuvent être conçûs dans tous ces cas, (*figures* 12. 13. 14 *&* 15.) comme exerçant deux réactions égales des deux côtés, contre le plan *A B*, le corps *P*, (*figures* 12. *&* 14.) ou contre les deux corps *Q* & *R*, (*figures* 13. *&* 15.)

59. Si l'on suppose deux ressorts *M*, *m*, (*figure* 16.) posés l'un sur l'autre, & tous les deux ensemble sur le plan *A B*, & comprimés aussi tous les deux par le poids d'un même corps *P*, éga

à celui de la *fig.* 12. Il est clair, 1°. Que si le ressort M au lieu d'être posé immédiatement sut le ressort *m*, en étoit séparé par un second plan *a b*, (*fig.* 17.) & que ce plan fût de plus soutenu à ses deux extrémités en *a* & en *b*, par deux soûtiens *S* & *T*; en sorte que le ressort *m* n'eût aucune pression à supporter : Il est clair, dis-je, que la pression de ce premier ressort M seroit égale à celle du ressort M de la *figure* 12. de même que la pression soufferte, (pour ainsi dire,) par le plan *a b* seroit aussi égale à celle du plan *AB*, (*figure* 12.) c'est-à-dire, égale au poids du corps *P*.

60. 2°. Cette pression agit donc sur les soutiens *S* & *T*, & sur ce plan *a b* (comme on vient de dire,) avec toute la force de ce poids; (le poids du plan *a b* & celui du ressort M est ici compté pour rien.) D'où il suit que ces soûtiens & ce plan étant ôtés, (*figure* 16.) le ressort M sera soûtenu immédiatement par le second ressort *m*, lequel éprouvera ou souffrira en leur place toute cette pression, & sera par conséquent tout autant comprimé que le premier ressort M, & agira sur le plan

A B, avec la même force que ce premier *m*, agissoit sur *a b*.

61. D'où il suit que par la pression du seul corps *P*, ces deux ressorts M & *m* seront chacun autant comprimés, que le seul ressort M, (*fig.* 12.) & que la compression totale de la suite composée de ces deux ressorts, sera double de la compression du seul ressort M (*fig.* 12.); enfin, que le plan *AB* souffrira une pression égale à celle du plan *AB*, (*fig.* 12.) ou égale au poids du corps *P*.

62. On démontrera de même que, si plusieurs ressorts M, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, &c. (*figure* 18.) étant posés les uns sur les autres, & tous ensemble sur le plan *A B* sont aussi comprimés tous ensemble par la pression d'un seul corps *P*, égal à celui de la *figure* 12. la compression particuliere de chacun d'eux, comme M ou *m* sera égale à celle du seul ressort M, de la *fig.* 12. ou à celle de l'un des deux M ou *m* de la *fig.* 16. de maniere que la compression totale de la suite M *m n o p q*, de la *fig.* 17. sera à la compression totale de la suite M *m* de la *fig.* 16. comme le nombre des ressorts égaux de cette premiere suite, au nombre des ressorts égaux de la secon-

de, ou comme la longueur de la premiere à la longueur de la seconde.

63. On prouvera aussi que la pression soufferte par les plans *AB* (*figures* 12. 16. & 18.) sera la même dans tous ces cas.

64. On pourroit encore prouver la Proposition du n°. 62. de cette maniere, en concevant que chaque ressort résiste toujours des deux côtés, avec des forces égales qui agissent en sens opposé l'une vers le haut, & l'autre vers le bas. D'où il suit que la résistances de toutes les parties supérieures des ressorts, *m*, *n*, *o*, *p* & *q*, est détruite par la résistance contraire des parties inférieures des ressorts M, *m*, *n*, *o*, & *p*; de sorte qu'il ne reste de toutes ces résistances que celle de la partie supérieure du ressort M., laquelle soûtient le poids du corps *P*, en détruisant à chaque instant *d t* la force infiniment petite de ce poids, & celle de la partie inférieure du ressort *p*, laquelle agit sur le plan *AB*, avec la même force que la résistance précédente, (qui lui est supposée égale, à cause de l'egalité de tous les ressorts M, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*,) agit contre le poids du corps *P*.

65. On démontrera encore que, si plusieurs ressorts, M, *m*, *n*, *o*, *p* & *q*, posés horisontalement à côté les uns des autres, (*fig.* 19.) sont comprimés tous ensemble, (par le moyen des deux plans *A B*, *C D*,) par les poids de deux corps *R* & *Q*, égaux chacun au corps *P*, de la *figure* 12. ou au corps *P* de la *figure* 17, la compression totale de tous ces ressorts sera égale à celle de tous les ressorts de la *figure* 18., si leur nombre est le même, & la compression particuliere de chacun d'eux, sera aussi égale à celle du seul ressort des *figures* 12. & 13.

66. La pression soufferte par chacun des plans *A B*, *C D*, sera encore précisément la même que celle du plan *A B* de la *figure* 17. ou du plan *A B* de la *figure* 12. ou de l'un des deux plans *A B*, *C D*, de la *figure* 13. D'où il suit que la résistance ou réaction de tous ces ressorts à l'égard de chacun des plans *A B*, *C D*, ou de chacun des corps *P* & *Q* est égale à celle des ressorts, M, *m*, *n*, *o*, *p*, de la *figure* 16. à l'égard du seul plan *A B*, ou du seul corps *P*, ou à celle du seul ressort M à

l'égard du plan *A B* & du corps *P*, de la *figure* 12.

Les Propositions précédentes sont utiles pour expliquer la nature du ressort de l'Air & des autres Fluides elastiques & compressibles, & à rendre raison pourquoi, par exemple, une très-petite quantité de cet Air enfermé dans un tuyau posé verticalement, peut soutenir, sans s'affaisser & se comprimer, un poids égal à celui que soûtient de même une quantité d'Air beaucoup plus grande: si l'on joint à cette propriété du ressort de l'Air, celle d'agir en tous sens avec une même force, on pourra rendre raison de tous les Phénoménes qui dépendent des pressions, & de la pésanteur de l'air ordinaire.

67. Soient encore deux fibres *F* & *f*, (*figure* 20.) attachées l'une à l'autre, & toutes les deux ensemble au plan *A B* & tirées ou tenduës par un même corps pesant *P* attaché à l'extrémité inférieure *i* de la premiere fibre *f*. Il est clair que l'extrémité supérieure *s* de cette fibre, supportera la même tension ou traction de la part du corps *P*; que si cette extrémité étoit attachée immédiatement à un autre plan *a b*,

(*figure* 21.) soûtenu en *a* & en *b* comme celui de la *figure* 17. d'où il suit (en raisonnant comme dans les n°. 59, 60 & 61.) que la seconde fibre *F*, (*fig.* 20.) supporte aussi elle-même cette traction, aussi-bien que le plan *A B*, & que cette traction est égale au poids du corps *P*, & par conséquent, que chacune des deux fibres *F* & *f* sont aussi fortement tenduës & autant allongées par le poids de ce seul corps, que la seule fibre *F G* de la *figure* 14. & que les plans *AB* de ces deux figures 14. & 20. sont tirés en bas avec une même force égale à ce poids.

68. On démontrera enfin, par une méthode semblable à celle des n°. 62, 63, & suivans, que, si plusieurs fibres, *F*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, attachées les unes aux autres, sont de plus attachées toutes ensemble au plan *A B*, (*figure* 22.) & tendues par le poids d'un seul corps *P*, (égal à celui de la *figure* 14.) ou tendues comme dans la *figure* 23. par le poids de deux corps *Q* & *R* égaux chacun au corps *P*, la tension & l'allongement particulier de chacune de ces fibres *F* ou *f*, ou *g*, sera le même que celui de la seule fibre *F G* de la *figure* 14. ou

que celui de chacune des deux fibres *F* ou *f*, de la *figure* 20. & la tension ou allongement total des sommes *FK*, (*figure* 22.) ou *FG*, (*figure* 20.) de ces fibres sera proportionnelle au nombre de ces mêmes fibres.

69. Enfin, la force avec laquelle elles resistent toutes ensemble à la traction de chacun des poids *P*. *Q* ou *R*, sera égale à la résistance de la seule fibre *FG*, (*figure* 14.) à l'égard du corps *P*; de même que la force dont le plan *A B* est tiré vers le bas, égale à celle qui tire celui *A B* de la *figure* 14. ou égale au poids de l'un ou l'autre de tous ces corps, *P*. *Q*. *R*. (*figures* 22 & 23.) & *P*. (*figure* 14.)

70. On peut regarder l'assemblage de tous les ressorts des *figures* 18 & 19. comme une suite de plusieurs ressorts égaux en force, ainsi qu'il a été dit, (n°. 46.) ou comme un seul ressort M, (*figures* 24 & 25,) dont l'ouverture naturelle est beaucoup plus grande que celle de l'un des petits *F* ou *f*, d'où il suit que lorsque des suites quelconques de ressorts égaux en force, ou des ressorts *semblables*, (n°. 44.) entiers & & équivalens à ces suites, sont com-

primés par le poids d'un même corps *P*, comme dans la *figure* 24. ou par le poids de deux corps *Q* & *R*, égaux à *P*, comme dans la *figure* 25. les résistances ou réactions de ces suites, ou de ces ressorts contre chacun des corps *P*, *Q* ou *R*, ou des plans *AB*, *AB*, *CD*, seront égales entr'elles, & au poids de chacun de ces corps, ou enfin à la résistance d'un seul des petits ressorts *F* ou *f* comprimés par l'un de ces mêmes corps, comme dans les *figures* 12 & 13.

71. Les compressions totales de ces suites ou de ces ressorts, seront proportionnelles à leurs longueurs ou à leurs ouvertures naturelles; & par conséquent, inégales suivant l'inégalité de ces suites, ou de ces ressorts.

72. En considérant de même l'assemblage de toutes les fibres, *F*, *f*, *g*, *h*, &c. des *figures* 22 & 23. comme une seule fibre *FG*, (*fig.* 26 & 27.) beaucoup plus longue que l'une des petites *F* ou *f*, &c. on trouvera que lorsque des fibres de même force, mais de différentes longueurs (*fig.* 14. & 26. 15. & 27.) sont tenduës de la même maniere par des poids égaux, *P*, (*fig.* 14.

& 26.) ou *Q* & *R*, (*figure* 15. & 27.) leurs résistances ou réactions contre chacun des corps *P*, *Q* ou *R* seront égales entr'elles, & au poids de l'un ou de l'autre de ces corps; de même que la force avec laquelle les plans *A B* des *fig.* 14 & 16. sont tirés vers le bas, & leurs tensions ou allongemens en même proportion que leurs longueurs.

73. Les Propositions précédentes & les suivantes sur les *tensions* & les *résistances* des fibres sont comme les Elémens ou les Principes de la Théorie des vibrations des cordes de Musique, du mouvement des muscles &c. & c'est principalement pour cette raison que je les rapporte ici, autant que pour leur rapport avec les résistances des ressorts.

74. La position successive des ressorts *M*, *m*, *n*, *o*, *p*, de la *fig.* 18. les uns sur les autres, fait que la pression entiere du même corps *P*, sur le premier ressort M, laquelle est égale au poids entier de ce corps, se transmet ou passe aussi toute entiere dans les ressorts inférieurs, *m*, *n*, *o*, *p*, &c. & même dans le plan *A B* : Mais, lorsque ces ressorts sont posés horisontalement

les uns à côté des autres, dans le sens de leurs lignes d'étenduë, comme dans la *figure* 28. & qu'ils s'appuyent tous immédiatement sur le même plan *AB*, la pression entiere du corps *P* se distribue ou se divise, (pour ainsi dire,) en autant de pressions particulieres & d'autant qu'il agit sur un plus grand nombre de ressorts; de sorte que la compression de chacun d'eux, *n*, *o*, &c. & la pression de chaque partie correspondante *ab*, *cd* du plan *AB*, diminue dans la même proportion que leur nombre augmente. Mais la somme de toutes ces compressions est égale à la compression du seul ressort M, de la *figure* 12. de même que la somme des pressions particulieres du plan *AB* où la pression entiere supportée par ce plan, est égale à celle du plan *AB* de la *figure* 12.

75. On prouvera de même à l'égard de plusieurs fibres, *F*, *f*, *g*, *h*, *i*, (*fig.* 29.) attachées les unes à côté des autres à un même plan *AB* tenduës par un même corps *P*, que les tensions ou allongemens de chacune d'elles diminuent en même proportion que leur nombre augmente, en sorte que la

somme de tous leurs allongemens sera égale à l'allongement de la seule fibre *FG* de la *figure* 14. mais la traction du plan *A B* ou la force avec laquelle il est tiré vers le bas, est encore égale à celle du plan *A B*, de la même *figure* 14.

76. Il est évident que l'assemblage des ressorts de la *figure* 28, peut être regardé comme un seul ressort M, (*fig.* 30.) beaucoup plus roide ou plus étendu, (n°. 43.) que l'un des petits *n* ou *o*, mais d'une même ouverture naturelle, & que l'assemblage des fibres de la *figure* 29. peut être regardé comme une seule fibre *FG*, (*figure* 31.) beaucoup plus épaisse ou plus forte que l'une des petites *f* ou *g*, mais de même longueur. L'on trouvera par les n°. précédens, que les compressions des ressorts inégaux en étenduë ou en roideur, mais d'égale ouverture, & les allongemens des fibres de différentes forces ou épaisseurs, mais d'égales longueurs, produites par des pressions égales, ou par des poids *P* égaux, sont réciproquement proportionnelles aux étenduës de ces ressorts ou aux épaisseurs de ces fibres.

77. Si l'on nomme *e* l'étenduë des ressorts, ou la grosseur des fibres quelconques, *l*, leurs longueurs, *r*, leurs roideurs ou leurs forces, *x* la grandeur de leurs compressions ou allongemens produites par des pressions égales, on aura toujours, (nº. 62, 68 & 76.)

$$x = \frac{l}{r\ e}$$

78. Mais si les poids *P*, ou les pressions *p* qui agissent sur ces ressorts, sont inégales de même, & en même proportion que les étenduës des ressorts, il est clair que leurs compressions *x* seront égales, en supposant d'ailleurs leurs roideurs *r*, & leurs longueurs *l* aussi égales.

IV. *De la Proportion des Forces finies détruites par l'application continuë des résistances instantanées des ressorts & des fibres, par rapport aux tems pendant lesquels elles durent.*

79. Puisque le ressort M de la *figure* 12. ou la fibre *FG* de la *fig.* 14. résiste continuement, (nº. 51.) à la pression ou à la traction du corps *P*, & détruit par conséquent, (selon l'idée de résis-

tance continuë, (n°. 15 & 51.) à chaque instant dt une force infiniment petite df égale à cette pression p ou au poids mdv, (n°. 23.) de ce corps P, il s'ensuit que le nombre de ces forces détruites, pendant un tems fini quelconque t est infini, aussi-bien que le nombre des forces infiniment petites, df, ou mdv communiquées par la pésanteur au corps P, pendant le même tems fini t, de même encore que le nombre des pressions souffertes par le plan AB.

80. Il est évident par les n°. 51. & 55. que ce ressort M ou cette fibre FG, en détruisant continuëment ces forces infiniment petites df dans le corps P, en communique aussi continuëment au plan AB d'autres précisément semblables ou égales $= df$, lesquelles sont elles-mêmes détruites par la résistance de ce plan, ou par la résistance des autres corps qui le soutiennent; d'où il suit, & du n°. précédent.

81. Que le ressort M ou la fibre FG pourroit par sa résistance continuë & & uniforme, détruire d'une part pendant ce tems fini t, une force finie f, ou une force infiniment plus grande que

que le poids du corps *P*, (n°. 11. & 17.) & égale à la somme de toutes les forces infiniment petites $df = mdv$, & produire ou communiquer d'une autre part une force semblable & que l'une & l'autre de ces forces sont précisément égales à la force finie mv, que la pésanteur a communiquée pendant le même tems fini au corps *P*, (n°. 12.) laquelle force finie, auroit produit dans ce corps une vîtesse finie v, si elle n'avoit été détruite par la résistance du ressort.

81. Le même raisonnement auroit encore lieu, quand même on supposeroit que cette résistance continuë des ressorts ou des fibres ne fût pas uniforme, mais variée; en sorte que leurs résistances instantanées rdt, (n°. 20.) & infiniment petites égales aux pressions pdt, ou aux poids mdv des corps *P*, variassent continuellement à chaque instant dt, soit en augmentant, soit en diminuant; ce qui rendroit aussi variables & dans les mêmes proportions. 1°. Les poids des corps *P*. 2°. Les dégrés ou quantités x de compression des ressorts & d'allongemens des fibres: Et 3°. les pressions ou trac-

tions souffertes par les plans *AB*, ou les forces infiniment petites *df* qui leur ont été communiquées par les résistances de ces fibres, ou de ces ressorts, (n°. 30.)

82. Ainsi l'on peut conclure en géneral de tout ce qui a été dit ci-devant. *Que des ressorts & des fibres quelconques peuvent détruire pendant un tems fini* t, *une force finie quelconque* f, *dans un corps mû quelconque, & produire ou communiquer précisément la même force finie à un corps en repos quelconque par leur résistance continue, soit uniforme, soit variée*, & cela, sans que ces ressorts ou ces fibres soient obligées, pour produire un tel effet, de se débander, ou de se racourcir, puisqu'au contraire, ainsi qu'on vient de le remarquer, (n°. 81.) leurs dégrés de bandement ou de tension peuvent même aller en augmentant, si leurs résistances momentanées augmentent ou réciproquement: mais ces mêmes dégrés diminuëront, si ces résistances diminuent; ce qui est alors le cas où les ressorts se débandent, & où les fibres se racourcissent.

83. Le nombre des forces infiniment petites toutes égales entr'elles, & au poids $p = m\,d\,v$ d'un même corps *P*,

(*figures* 12 & 14.) détruites pendant un tems fini *t* par la résistance continuë *r* d'un ressort M, ou d'une fibre *FG*, augmente ou diminuë en même proportion que le tems fini *t*, pendant lequel cette résistance dure, ou pendant lequel ce ressort & cette fibre sont retenus dans le même état ou dans le même dégré de bandement & de tension, par la pression d'un même corps *P*, & par conséquent, la somme de toutes ces forces infiniment petites, ou (ce qui est la même chose,) la force finie *f* détruite est, (toutes choses d'ailleurs égales,) d'autant plus grande, que le tems fini *t*, pendant lequel la même résistance *r* a continué est plus long.

84. Plus ce tems est long, plus la force *f* & la vîtesse finie *v* communiquée par la pésanteur au corps *P* est grande ; puisqu'elle est la somme de toutes les vîtesses infiniment petites *d v* qu'elle lui communique dans chacun des instans *d t*, dont ce tems est composé. Mais cette vîtesse finie n'a point eu lieu à cause de la résistance continuë du ressort ou de la fibre qui en a détruit toutes les vîtesses infiniment petites composantes ; d'où il paroît

suivre très-clairement que cette résistance continue a détruit une force f & une vîtesse v finies, ou un nombre infini de forces & de vîtesses infiniment petites, d'autant plus grand que cette résistance a duré ou a agi plus long-tems.

85. On peut encore remarquer la meme chose de la force finie f communiquée aux plans $A\ B$ par cette résistance, suivant le raisonnement du n°. 80. & même lorsque cette résistance r, au lieu d'être uniforme, seroit variée comme il a été dit dans le n°. 81. & conclure enfin en général comme dans le n°. 82.

86. *Que les forces* f *finies détruites dans un corps mû quelconque ou produites dans un corps en repos quelconque pendant un tems fini* t, *par la résistance continuë* r, *soit uniforme, soit variée des ressorts ou des fibres, croissent & diminuent en même proportion que le tems fini pendant lequel cette résistance dure.*

87. Il faut remarquer que lorsque les résistances sont variées, les forces qu'elles détruisent ou produisent, ne sont pas toujours proportionnelles à la longueur de ces tems, à moins que

les variations de ces résistances ne soient égales dans des instans correspondans, ou dans des intervalles semblables des tems entiers, pendant lesquels elles continuent ; ce qui fait que dans le n°. 83. j'ai ajoûté cette condition, (*toutes choses étant d'ailleurs égales.*)

88. Les forces finies produites dans les plans *AB*, (*fig.* 12. & 14.) par les résistances des forces continuës des ressorts & des fibres sont elles-mêmes détruites par les autres corps ou appuis qui soûtiennent ces plans : Mais il y a plusieurs cas, tels que ceux du choc des corps, ou des forces finies semblables produites dans des corps en repos par des résistances de ressorts ou autres de même nature ne se détruisent point, mais se conservent toutes entieres, & font que ces corps qui étoient d'abord en repos, se meuvent ensuite avec des vîtesses finies, ainsi qu'on le verra dans la suite.

89. Soit un ressort M *N*, (*figure* 32.) sur lequel on laisse tomber d'une hauteur finie *H* un corps *P*. Ce corps à la fin de sa chûte, aura une vîtesse finie *v*; & par conséquent dans le prem

inſtant dt, il comprimera ce reſſort d'une quantité infiniment petite dx, & perdra par la réſiſtance du reſſort, une quantité de force infiniment petite dx, & perdra par la réſiſtance du reſſort, une quantité de force infiniment petite df. Dans le ſecond inſtant dt égal au premier, il produira encore une ſeconde compreſſion infiniment petite dx égale à la premiere, & perdra un ſecond dégré de force auſſi infiniment petit df & égal au précédent.

90. De même, dans le troiſiéme inſtant dt & pluſieurs des ſuivans, les compreſſions dx du reſſort, & les forces df détruites par ſa réſiſtance, ſeront infiniment petites & égales entr'elles.

91. Mais lorſqu'au bout d'un tems fini, la force & la vîteſſe du corps P ſeront diminuées d'une quantité finie, (la force ou roideur du reſſort étant ſuppoſée, par hipotheſe, conſtante, quoique ſes compreſſions aillent en augmentant,) les compreſſions infiniment petites produites pendant les mêmes inſtans égaux, ſeront moindres dans la même proportion que la vîteſſe du corps P aura diminué.

92. Si l'on fait cependant attention à ce qui a été dit ci-devant, (n°. 51.) de la résistance continue des ressorts, laquelle détruit des forces *df* infiniment petites égales dans des tems *dt* infiniment petits & égaux, lors même qu'il reste en repos dans un même état de bandement, il paroîtra évident que ces forces *df* détruites pendant des instans *dt* semblables, lorsque le ressort est mis en mouvement, étant toujours infiniment petites ou du même ordre que les précédentes doivent encore leur être égales, & égales entr'elles, quoique ce mouvement varie continuellement.

93. Le ressort de la *fig.* 12. peut être considéré comme bandé ou comprimé avec une vîtesse infiniment petite, ou comme recevant à chaque instant *dt* des compressions infiniment petites du second ordre, ce qui est précisément le cas du ressort de la *figure* 32. sur la fin du bandement; d'où il suit que les forces détruites par ces ressorts, dans des instans *dt* égaux seront égales; d'où il suit encore que si le transport des parties de ce dernier ressort, (*figure* 32.) ou la vîtesse instantanée de son bande-

ment, faisoit varier sa résistance instantanée ; cette résistance seroit inégale pendant toute la durée du bandement, & inégale à peu près dans la même proportion que la vîtesse de ce bandement, ou que la vîtesse du corps *R*, & par conséquent elle seroit infiniment plus grande au commencement que sur la fin. Cette résistance seroit donc finie, ou détruiroit des forces finies à chaque instant *dt* ; ce qui n'arrive absolument point.

94. Le raisonnement du n°. précédent, revient à peu près à celui des n°. 39. & suivans ; & peut être encore exprimé de cette maniere. Puisque le rapport infini entre le mouvement du ressort dans le commencement du bandement, & son repos sur la fin du même bandement, ne fait point changer d'ordre à la grandeur de ses résistances instantanées ou à la grandeur des forces *df*, détruites par ces résistances : il s'ensuit que le rapport fini entre le mouvement du même ressort dans deux tems différens quelconques de son bandement, ne fera point varier l'ordre ou le genre de ces mêmes forces entr'elles, & ce rapport qui est un rapport

port d'égalité dans le commencement, (n°. 90.) restera donc le même pendant toute sa durée, & les forces infiniment petites df, détruites dans tous les instans dt, seront égales entr'elles.

V. *De la résistance des Corps Mols.*

95. Soit un corps mol *M*, (*Figure* 33.) dont la nature soit telle que sa figure puisse être changée par la pression ou par le choc d'un corps dur, & que ses parties puissent être déplacées, sans qu'il leur arrive aucune compression ou aucune condensation ; & par conséquent, sans que le volume de ce corps diminue. (On examinera dans la suite jusques à quel point cette hypothese de l'incompressibilité des corps mols s'accorde avec l'expérience.)

96. Si ce corps mol ayant une figure sphérique, est posé sur un plan *A B*, & pressé par le poids du corps dur *P*, l'expérience fait voir que les deux portions extrêmes *x* & *y* de sa surface s'applatissent peu à peu jusques à un certain point, pendant la durée d'un tems

fini fort court, & que les parties placées en *m*, *n*, *o*, *p*, s'écartent des deux côtés, en sorte que ce corps mol *M*, prend la figure d'une espece de cylindre elliptique.

97. Mais les parties du milieu *s s*, ne se dérangeront point, (pourvû que la pression du corps dur *P* ne soit pas trop forte.) Ce que l'on peut connoître, en mesurant avant & après l'applatissement, le contour de l'anneau *s s*, terminé des deux côtés par les plans paralleles *a b*, *c d*.

98. Si l'on ajoûte un second corps dur *Q*, (*Figure* 34.) la pression augmentera, les deux surfaces *x* & *y* s'applatiront & s'élargiront encore plus, les parties, *m*, *n*, *o*, *p*, s'écarteront davantage vers les côtés; & même les parties moyennes, *ss*, qui ne s'étoient point dérangées dans le cas précédent, se déplaceront ainsi que les autres; (pourvû que le corps ajoûté *Q* soit d'une grosseur suffisante) & ce second applatissement durera de même, pendant un très-petit tems fini, au bout duquel les corps durs *P* & *Q* cesseront de descendre, & le corps mol *M* de s'applatir.

99. Si ce corps *M* demeurant dans le même état, on ôte les deux corps durs *P* & *Q* pour mettre en leur place un troisiéme *R* égal en poids aux deux premiers, il est clair que ce corps *R* ne produira point de nouvel applatissement & ne descendra point non plus : & c'est dans cette espece d'*équilibre*, entre la pression du corps dur *R*, & la résistance du corps mol *M*, que je considere cette résistance pour en pouvoir déterminer plus précisément les effets.

100. Supposé que chaque dégré infiniment petit de force df, & de vîtesse dv, communiqué au corps dur *R* par la pésanteur dans chaque instant dt, produise un applatissement très-petit dans le corps mol *M*, & que la résistance que les parties de ce corps *M* opposent à cet enfoncement, détruise entierement ce dégré de force df à chaque instant dt, il est clair ;

101. 1°. Que la vîtesse du corps *R* à chaque instant dt, étant infiniment petite, (n°. 12.) ne fera faire à ce corps *R*, pendant ce même moment, qu'un applatissement infiniment petit ddx,

ou, (comme parlent les Géomêtres) infiniment petit du ſecond ordre;& par conſéquent, ſi chacun de ces dégrés infiniment petits de vîteſſe $d\ v$, ſont continuellement détruits par la réſiſtance du corps mol *M*, le nombre infini de ces enfoncemens infiniment petits $d\ d\ x$ du ſecond ordre, produits pendant un tems fini t, ne feront qu'une ſomme ou qu'un enfoncement total du premier ordre $d\ x$, quoique le nombre infini des vîteſſes $d\ v$, & des forces $d\ f$ qui les ont produits pendant ce même tems fini t, & qui ont été détruites par la réſiſtance continuë du corps mol *M*, donne une ſomme finie, ou une vîteſſe v & une force f finies.

102. 2°. Que le plan *A B* ſouffrira une preſſion égale à celle que le corps dur *R* exerce ſur le corps mol *M*. (on ne fait ici aucune attention au poids du corps mol *M*) ou égale au poids de ce corps dur *R*; ou, (ce qui eſt le même) que la preſſion de ce corps dur *R* ſur le corps mol *M*, paſſera toute entiere ſur le plan *A B*, par l'entremiſe du corps mol *M*, tout comme la preſſion du corps *P* de la *Figure* 12. paſſe ſur le

plan *A B* , par l'entremise du ressort *M* ; ou comme la traction du corps *P*, (*Figure* 14.) passe encore sur le plan *AB*, par l'entremise de la fibre *FG* ; d'où il suit, en raisonnant comme dans le n°. 52.

103. 3°. Que le corps mol *M* peut être conçû comme comprimé des deux côtés par deux forces contraires & égales chacune au poids du corps dur *R* , l'une desquelles est l'action de ce même corps *R*, & l'autre est la réaction ou résistance du plan *A B* ; ce qui paroît évidemment , puisque les deux surfaces *x* & *y* seront autant applaties l'une que l'autre.

104. Il s'ensuit encore que ce corps mol *M* sera pressé & aplati de la même maniere , s'il est posé comme dans la *Figure* 36. entre deux plans , *A B* , *CD*, qui soient poussés l'un vers l'autre par le poids de deux corps *R* & *S* égaux chacun au corps *R*, de la *fig.* 35.

105. Il est évident que, pour peu que l'on augmentât le poids du corps dur *R*, de cette *fig.* 35. ce corps descendroit & applatiroit encore davantage le corps mol *M* ; & par conséquent

la résistance du corps mol, à la fin de l'applatissement, seroit aussi augmentée, puisqu'elle est toujours, (n°. 99.) égale à ce poids : d'où il suit que *les résistances des corps mols*, c'est-à-dire, les plus grands poids qu'ils puissent soutenir sans s'applatir, *augmentent proportionnellement à leurs surfaces*; ce qui est encore une propriété commune à la résistance de ces corps, & à celle des ressorts & des fibres, du n°. 76.

106. Il est encore évident que, si l'on presse différens corps mols *M* & *N*, (*Figures* 37. *&* 38.) par des corps durs égaux, *P* & *Q*, plus grands que ceux que ces mêmes corps mols *M* & *N*, pourroient supporter sans s'applatir, les petites quantités *d x* dont ces corps mols s'affaisseront, seront à peu près réciproquement proportionnelles à leurs surfaces, comme il a été remarqué de la compression des ressorts & de l'allongement des fibres, (n°. 76.).

107. Mais si les corps pésans & comprimans *R* & *Q* sont inégaux, & les surfaces & les tenacités des corps mols *M* & *N* égales, les petits applatissemens *d x* seront directement proportionnels à la grandeur des poids *P* & *Q*.

108. Mais ces petites quantités *d x* ne varient point, lorsque les hauteurs ou longueurs des corps mols sont différentes, parce que les applatissemens ne se font qu'à leurs surfaces, au lieu que les allongemens des fibres, qui sont proportionnels (n°. 72.) à leurs longueurs, se font dans toute leur étenduë.

109. On peut remarquer sur la nature des corps mols, que la plupart de ceux sur lesquels on fait des expériences sont un peu compressibles jusques à un certain point; en sorte que la supposition du n°. 95. n'est pas exactement vraye à leur égard, sur tout si leurs parties, comme celles de l'argille, sont de la nature de celles du sable ou de la terre. Soit, par exemple, (*figure* 39.) un vase cylindrique *A C* rempli jusques en *a b* d'argille, sur la surface de laquelle on ait posé un corps *R* cylindrique aussi, & qui remplisse toute la capacité du vase; l'expérience fait voir que l'argille se comprimera en s'affaissant un peu au-dessous de la ligne *a b*; & par conséquent se condensera, puisqu'aucune de ses parties ne peut remonter, n'y ayant aucun intervalle

entre les surfaces cylindriques du vase *AC* & du corps dur *R*. La premiere couche supérieure de l'argile sera la plus condensée, les inférieures le seront de moins en moins jusques à une certaine couche *m*, au-dessous de laquelle il ne se fera plus de condensation, pas même dans la derniere *d*, qui touche le fond *AB*, (on ne fait encore ici aucune attention au poids de l'argille).

110. Il arrive à cette argille à peu près la même chose qu'il arriveroit à un amas de plusieurs petits grains de sable ou de petits cailloux entassés les uns sur les autres. Il est clair qu'un corps pésant, comme une pierre plus grosse posée sur ce tas, le pressera ; en sorte que sa pression ou son poids agira tout entier sur le plan qui soûtient le tas, de même que sur toutes ses couches & ses surfaces supérieures & inférieures : mais il paroît qu'il n'y aura que les petits cailloux supérieurs, qui changent considérablement leurs situations respectives, en s'arrangeant & se serrant plus près les uns des autres : ceux qui sont plus en dessous, se soutiennent & se servent mutuellement de points d'appui, & par cette

raison ne se dérangent pas.

111. Mais cette condensation des corps mols ne mérite pas d'être considérée dans les applatissemens faits par le choc, parce que, n'allant jamais qu'à un certain dégré que le plus petit de ces chocs peut produire, elle se trouve la même dans tous, & ne les fait point varier à cet égard.

112. Ces remarques sur la maniere dont ces applatissemens & ces condensations se forment, paroissent assez inutiles à la Théorie présente de la résistance des corps mols, dans laquelle il s'agit plutôt de déterminer mathématiquement les quantités & les proportions de certains effets avec leurs causes, que d'expliquer physiquement la maniere dont ces effets sont produits, ou la nature particuliere de l'action des causes qui les produisent.

113. La somme des forces df détruite pendant un tems fini t, dans le corps dur R, par la résistance continuë du corps mol M est égale à une force finie f ou à la force finie, que le corps R auroit acquis par la pésanteur pendant ce même tems fini, s'il s'étoit mû en tombant librement.

114. La somme des forces df communiquées pendant la durée de ce même tems fini t au plan AB par la même résistance, est encore égale à cette même force finie f, & ces deux forces détruites & communiquées, sont d'autant plus grandes, (toutes choses d'ailleurs égales) que ce tems fini t est plus long, soit que cette résistance soit uniforme, soit qu'on la suppose variée. Les quatre Propositions se prouveront à l'égard de la résistance des corps mols, de la même maniere qu'elles ont été démontrées à l'égard de celles des ressorts ou des fibres. Ainsi il n'est pas nécessaire de répéter ici les mêmes raisonnemens.

115. On trouvera de même que la force f détruite pendant un tems fini t, par la résistance r continuë, soit uniforme, soit variée, d'un corps mol dans un corps en mouvement, & produite de même dans un corps en repos, est finie & proportionnelle (toutes choses d'ailleurs égales,) à la durée de ce tems, de même que la force produite pendant ce même tems par la même résistance dans un corps en repos. 2°. Ces forces seront égales en-

tr'elles & à la force finie *f* que la pésanteur auroit communiqué pendant la durée du même tems au plus grand corps dur, que ce corps mol pourroit soutenir sans s'applatir.

116. Soit un corps mol *M*, (*Figure* 40.) sur lequel on laisse tomber d'une hauteur finie *H*, un corps dur *P*. Ce corps, à la fin de sa chûte, à l'instant qu'il commence à toucher le corps mol *M*, aura une vîtesse finie; & par conséquent dans le premier instant *dt*, qu'il commencera à applatir ce corps mol *M*, il l'applatira d'une quantité infiniment petite *dx*. 2°. Que ce même corps dur *P*, soit supposé tomber d'une hauteur infinie, il aura dans ce premier instant *dt* une vîtesse infinie, & produira par conséquent un enfoncement fini. Enfin, 3°. Que ce même corps dur *P* soit simplement posé sur la surface du corps mol *M*, ou supposé tomber d'une hauteur infiniment petite, il ne produira durant ce même instant *dt*, qu'un applatissement infiniment petit du second ordre *ddx*.

117. Tous les Physiciens conviennent que dans ces trois cas, la force détruite par la résistance du corps mol

dans le mouvement, soit fini, soit infini, soit infiniment petit du corps dur *P*, est infiniment petite du premier ordre ou équivalente à celle d'une simple pression : cependant les applatissemens produits pendant les mêmes instans $d\,t$ sont tous trois de différens ordres, le premier infiniment petit du premier ordre, le second fini, & le dernier infiniment petit du second ordre ; d'où il suit que la grandeur de ces applatissemens ne contribue en rien à augmenter, ou diminuer celle des forces détruites & produites.

VI. *Des forces détruites ou produites dans des Corps durs en mouvement, ou en repos, par la résistance des ressorts & des Corps mols.*

118. Tous les Physiciens conviennent que les quantités q de mouvement des corps qui se meuvent avec des vîtesses, soit infiniment petites dv, soit finies v, sont égales au produit des masses m de ces corps par leurs vîtesses, ou que, $q = m\,d\,v$, ou $= m\,v$ & même lorsque leurs vîtesses sont infiniment petites, (ce qui paroît être

précisément le cas des *pressions*, (n°. 14.) ou des simples *tendances* au mouvement.) Ils conviennent encore que les forces motrices & infiniment petites *df* de ces corps, sont égales à leur quantité de mouvement, ou aux produits de leurs masses par leurs vîtesses infiniment petites.

119. Mais lorsque leurs vîtesses sont finies de même que leurs quantités de mouvement, les uns supposent encore leurs forces motrices *f* égales à ces quantités, ou aux produits des masses de ces corps par leurs vîtesses finies, ou que $f = mv$. D'autres supposent au contraire, qu'elles sont égales aux produits de leurs masses par les quarrés de leurs vîtesses, ou que $f = mvv$, & ils nomment ces forces finies, *forces vives*, comme pour les distinguer doublement des forces infiniment petites du n°. précédent, qui suivent une autre proportion, & qu'ils appellent *forces mortes*.

120. La premiere de ces suppositions paroît beaucoup plus simple, plus conforme à l'uniformité de toutes les loix de la nature, & par là même plus vraisemblable : aussi a-t'elle été universel-

lement reçûë de tous les Physiciens, jusques à la fin du dernier siécle ? & elle est même encore reçûë par le plus grand nombre d'entr'eux. Mais l'autre hypothese nouvelle inventée par M. *Leibnitz*, semble avoir en sa faveur quantité d'expériences très-exactes, très variées, & combinées dans toutes sortes de cas.

121. Si cependant ces expériences qui regardent presque toutes, le choc & la compression des corps mols & élastiques, peuvent s'expliquer par le systême ordinaire sur la proportion des forces motrices, d'une maniere simple, fondée sur les premiers principes & les plus certains de la Méchanique, & également applicable à tous les cas; il semble que l'on pourroit en conclure entierement la vérité & la certitude de ce systême ordinaire. On me permettra par conséquent de le suivre par tout, tant que les explications que j'en pourrai tirer, seront telles que je viens de dire, & tant que les conséquences où il me conduira, n'auront absolument rien de contraire ou de différent de ces mêmes principes certains.

123. Si l'on mesure la force des corps en mouvement, (lesquelles on appelle quelquefois *forces résidentes*, *vires insitæ*,) par la somme des pressions qui les ont produites par une application continuë durant un certain tems, ou par la somme des résistances qui pourroient les détruire de la même maniere, on trouvera toujours ces sommes, & par conséquent ces forces égales aux produits des masses des corps par leurs vîtesses (comme il sera prouvé dans la suite). * Cette maniere de mesurer les forces mouvantes, (*résidentes*,) étant fondée sur leur génération ou production, & sur leur destruction, c'est-à-dire, sur la maniere dont elles se produisent & se détruisent, (ce que quelques auteurs ont déja remarqué,) paroît plus naturelle, plus vraie, (pour ainsi dire,) ou plus conforme à la nature de la chose, que la mesure tirée du nombre des effets

---

* Voyez les *Commentaires de l'Acad. Imp. de Petersbourg.* Tom. 1. page 132. où M. Daniel Bernoulli dit : *Unde si quis vim corpori moto insitam definiat ex summâ omnium pressionum momentanearum, quas corpus directe sustinere potest prinsquam motum suum perdat, hic jure illam proportionalem faciet velocitatibus simplicibus.*

produits pendant un certain tems; comme, par exemple, du nombre des reſſorts bandés ou des eſpaces parcourus &c. puiſqu'une même force peut produire un plus grand ou un plus petit nombre de ces effets, ou de plus grands & de plus petits effets de cette eſpece, ſuivant qu'elle agit plus ou moins long-tems. Ce qui paroît évident par l'exemple d'un corps, qui ſe mouvant toujours avec une même vîteſſe, & par conſéquent avec une même force, pourra cependant parcourir (en remontant) en vertu de cette force, des plans inclinés de différentes longueurs, (mais d'une même hauteur) pendant des tems différens.

123. Comme ces queſtions, (qu'on pourroit appeller Métaphyſiques) ſur la nature & l'eſtimation des forces mouvantes, ont déja été traitées par quelques Auteurs, d'une maniere très-ſatisfaiſante, je ne m'y arrêterai point, & j'eſſayerai plutôt de faire voir comment la production de tous ces effets de différente eſpece, leſquels ſe font remarquer principalement dans les expériences du choc des corps, peuvent s'expliquer ou ſe déduire méchaniquement

niquement de la premiere estimation des forces (*résidentes*) égales aux produits des masses par les vîtesses. Cette explication ne paroissant pas avoir été donnée jusques à présent avec assez d'exactitude, sur tout depuis les expériences nouvelles que l'on a faites sur ce sujet.

124. soit *AB*, (*Figure* 41.) une suite de ressorts égaux de la premiere espece, (n°. 46.) dont la longueur ou l'ouverture naturelle l soit égale à *AB*, & la roideur r soit constante ou variable dans les différentes compressions x de cette suite, ensorte que, 1°. dv, exprimant encore ici comme dans le n°. 23. les dégrés infiniment petits de vîtesse constans ou égaux que la gravité communique à chaque instant aussi constant dt à tous les corps ; & 2°. n, la masse d'un corps quelconque dont le poids seroit toujours en équilibre avec la résistance de cette suite, laquelle masse n doit par conséquent être supposée constante ou variable, comme cette résistance, on ait toujours $r\,dt = n\,dz$.

125. Soit encore *LM*, (*Figure* 42.) une courbe d'un longueur *NM*, égale

à celle *AB*, (l) dela ſuite des reſſorts. Que l'on prenne ſur cette courbe une portion quelconque *MO* égale à une compreſſion quelconque *BD*,(x) de la ſuite, & que l'on tire au point *O* une tangente *o O p*. Soit encore un corps *M*, poſé ſur la courbe *NM*; premierement en *M*, enſuite en *O*. Il eſt clair que la gravité agira avec plus de force ſur ce corps *M*, placé en *O*, que ſur le même corps placé en *M*, & lui communiquera par conſéquent, pendant l'inſtant conſtant dt, un plus grand dégré de vîteſſe infiniment petit dv, au point *O*, ſelon la longueur de la tangente *o O p*, qu'au point *M*, ſelon la longueur de la tangente *LM*. Et ſi la propriété de cette courbe *NM* eſt telle que ces différens dégrés de vîteſſe dv, communiqués (par la gravité dans les mêmes inſtans dt à un même corps *M*, poſé en différens points *O*) ſelon la longueur des tangentes *o O p*, ſoient toujours proportionnels aux réſiſtances inſtantanées $r\,dt$ de la ſuite *AB* dans ſes différentes compreſſions (x), *BD* correſpondantes ou égales aux portions *MO* de cette courbe. J'appellerai cette courbe *NM*, *équivalente* à la ſui-

te de ressorts *A B*. On peut supposer aussi toujours les tangentes *N L*, & *LM*, aux points extrêmes *N* & *M* de cette courbe verticale & horisontale.

126. Soit enfin, 3°. la masse *m* du corps *M*, telle que ce corps étant posé sur la suite *A B* posée elle-même verticalement sur le plan *a b*, il l'a retint entierement comprimée ou bandée par la force de son poids *p* (n°. 23.) $= m\,d\,v$, de maniere que pour peu qu'il fût moindre en poids ou en masse, la suite *A B* se débandât d'une certaine quantité. Je nommerai ce poids $p\,d\,t$, ou $m\,d\,v$ du corps *M*, *Poids d'Equilibre*, avec la plus grande roideur *r*, ou résistance insantanée *rdt*, de la suite de ressorts *AB*.

127. Soit donc la suite de ressorts *AB*, (*Figure* 43,) posée horisontalement & entierement comprimée ou bandée & appuyée contre un plan vertical *a b*, & prête à se débander, & à pousser en avant un corps *C*, placé en repos directement au devant d'elle. Que la masse de ce corps *C* soit égale à la masse *m*, du corps *M*, de la *Fig.* 42. & qu'il puisse se mouvoir horisontalement dans le même sens que la suite

A B peut se débander.

128. Il est clair que la résistance continuë de cette suite, (dans cet état de compression entiere) étant précisément égale à la force ou intensité, (n°. 29.) de la gravité dans le corps *C* posé à l'extrémité supérieure *N* de la Courbe *N M*, cette résistance produira pendant le premier instant *d t* du débandement, la petite force *d f*, & le même petit dégré de vîtesse *d v* dans ce corps *C*, que la gravité lui communiqueroit dans le même premier instant *d t*, s'il étoit placé en *L*.

129. La suite *AB* se débandera donc d'une quantité infiniment petite du second ordre *ddx*, (à cause de la vîtesse infiniment petite du corps *C*,) égale à celle dont ce corps descendroit le long de la courbe *NM*; d'où il suit que ce corps se trouvant au second instant *dt* dans un point de la longueur *AB*, correspondant au point de la courbe *M*, il recevra ou acquerra par la résistance continue de la suite, un second dégré infiniment petit de force *df* & de vîtesse *d v* égal à celui qu'il recevroit dans le même second instant *d t* de la gravité, s'il descendoit le long de la courbe *NM*.

130. On prouvera de même que dans le troisiéme instant $d\,t$, & tous les suivans, ce corps *C* recevra les mêmes dégrés de force $d\,f$, & de vîtesse $d\,v$, de la résistance continuë de la suite (qui le pousse horisontalement en se débandant le long de la droite *AB*), & de la gravité qui le fait descendre le long de la courbe *N M*, & que les débandemens $d\,d\,x$ ou $d\,x$ de cette suite, lesquels sont égaux aux longueurs parcouruës par le corps dans chaque instant dt, le long de la droite *AB*, sont aussi égaux aux longueurs dx ou ddx, parcouruës par ce même corps dans les mêmes instans le long de la courbe *NM*, d'où il suit ;

131. Que ce corps *C*, dont la masse est *m* égale, (n°. 127.) à celle du poids d'*équilibre* de la suite *A B*, étant placé en repos, directement au devant de cette suite entierement comprimée, se trouve précisément dans le même cas, que s'il étoit posé à l'extrémité supérieure *N*, de la courbe *N M*; & par conséquent que la suite *A B*, en se débandant & se rétablissant dans son ouverture naturelle *A B*, communiquera au corps *C*, ou produira dans ce corps

par sa résistance continue & variable pendant un tems fini t, précisément la même force, $f=mv$, que la gravité communiqueroit à ce corps tombant ou descendant le long de la courbe NM, pendant le même tems t

132. On prouvera de même que si la suite AB étant toujours située horisontalement comme ci-devant, (n°. 128.) mais entierement débandée ou dans son ouverture naturelle, & que le même corps C se meuve directement contr'elle de D en C, avec une vîtesse v, égale à celle qu'il auroit acquise en descendant par la courbe NM ou en tombant librement d'une hauteur égale à NL. (*Philos. Nevvt. Instit.* n°. 203.) La force f de ce corps étant par conséquent $= mv$, il pourra avec cette force comprimer entierement la suite AB, (dont la longueur $AB=l$) pendant un tems t égal à celui qu'il employeroit à remonter le long de la courbe MN.

133. Il est clair encore, 1°. Que la force détruite de cette maniere dans le corps C, est égale à la force produite du n°. 131. & le tems pendant lequel cette premiere est détruite, égale ce-

sui pendant lequel cette derniere est produite. 2°. Que cette même force $f = mv$, aura aussi été communiquée au plan vertical *a b* par la résistance continue de cette suite *A B*, ou par l'entremise de cette suite, (& cela soit pendant son débandement, & la production de la force égale du corps *C*, (comme dans le n°. 131.) soit pendant son bandement ou sa compression, ou la destruction de cette force dans le même corps.) Mais parce que ce plan *a b* est supposé arrêté par des obstacles inébranlables, cette force *f* y a été entierement détruite.

134. Il s'ensuit de là ; 1°. Que la suite *AB*, dans le cas du n°. 132. peut être conçûe comme comprimée par le choc de deux corps égaux chacun au corps *C*, lesquels se mouvroient avec la même vîtesse *v* directement contre cette suite de part & d'autre, ou à parties contraires, & que les forces *résidentes* de ces deux corps, (égales chacune à la force *f* du corps *C*,) se consumeroient toutes entieres à comprimer cette suite *AB*.

135. 2°. Que cette même suite, après avoir été ainsi entierement comprimée

par ces deux corps égaux, pourra en se débandant, leur communiquer ou leur rendre précisément les mêmes forces *f* égales à celles qu'elle avoit détruites auparavant dans ces corps, ou égales chacune à la force *f* communiquée au corps *C*, dans le cas du n°. 138. &c,

136. 3°. Que les tems de son bandement & de son débandement, dans ce cas présent, seront aussi égaux au tems *t* de son bandement, &c. dans ce même cas du n°. 131. La vérité de ces trois derniers n°. se prouvera de la même maniere que celle des n°. 52. 53. & suivans.

137. Il n'est pas inutile de remarquer ici, 1°. Que l'état de bandement & de débandement actuel de cette suite, n'est point par lui-même la cause de la destruction ou production de cette force; mais uniquement la résistance de cette suite, qui agit continuement (ainsi qu'il a été expliqué n°. 82.) puisque cette même résistance détruisant cette force dans le corps *C*, en produit une toute semblable, & égale dans le plan *ab*.

138. 2°. Que cette même résistance

agira

agira toujours ſur ce corps *C* mû avec une vîteſſe quelconque *Z*, préciſément de la même maniere que la gravité agiroit ſur lui, s'il remontoit la courbe *N M* avec une telle vîteſſe *Z* ; & par conſéquent, cette réſiſtance détruira dans ce corps *C* mû avec cette vîteſſe préciſément la même force φ que la gravité lui communiquera en ſens contraire, ou qu'elle détruira dans ce corps lorſqu'il remontera la courbe *NM*, & cela, pendant le tems τ qu'il employera à comprimer la ſuite *AB*, ou à ſe mouvoir le long de cette courbe *N M*.

139. Que cette même réſiſtance produira ou communiquera encore au plan immobile *a b*, la même force φ, & pendant le même tems τ.

140. Si cette ſeconde vîteſſe *Z* du corps C, eſt beaucoup plus grande que la premiere v; le tems τ ſera au contraire beaucoup plus court que le tems t; & par conſéquent la force détruite φ, (laquelle eſt proportionnelle à la durée de ce tems τ, parce que la réſiſtance inſtantanée de la ſuite *A B*, eſt toujours la même, (n°. 93. & 94.) ſera beaucoup moindre que la force f; d'où il ſuit en raiſonnant comme dans

le n°. 136. que cette suite AB peut être conçûë comme comprimée par le mouvement du corps C d'une part, & celui d'un autre corps c de l'autre, duquel la force seroit égale à φ, & par conséquent beaucoup moindre que celle du corps $C = mz$, & que la force $f = mv$. Si la vîtesse Z devenoit infinie, le tems τ deviendroit infiniment petit, & la force φ détruite dans le corps C, ou produite dans le plan ab, ou détruite encore dans l'autre corps c, seroit infiniment petite. D'où il suit enfin, que la suite AB pourroit être considérée comme n'étant appuyée contre aucun obstacle ou arrêt, (tel que le plan vertical ab des n°. précédens,) & que cependant, elle pourroit être entierement comprimée dans un seul instant dt, par un corps dont la force & la vîtesse seroient infinies, & qui ne perdroit, en la comprimant ainsi, qu'un dégré de force & de vîtesse infiniment petit, ce qui revient à peu-près au raisonnement des n°. 117 & 118.

141. *Le* n°. *précédent fait comprendre très-clairement, à ce qu'il semble, la cause & la nature de quelques expérien-*

ces assez ordinaires ; & cependant très-surprenantes, sur la résistance des corps très-minces & très-foibles ; comme, par exemple, du verre à être brisé, des cheveux ou des soyes à être rompus, &c. j'en rapporterai seulement une ou deux qui pourront faire juger de toutes les autres.

142. *Ayant placé sur une table deux verres minces & pleins d'eau, on pose sur ces deux verres, un bâton médiocrement épais, & d'un bois qui puisse se casser sans plier beaucoup, mais non point sans résistance ; & l'on frappe sur le milieu de ce bâton, avec un autre bâton plus gros & plus fort. Si l'on frape assez promptement & assez vigoureusement pour casser le premier bâton presque dans un instant & sans le faire plier, les deux verres ne se ressentiront point du coup, & l'eau qu'ils contiennent, ne s'agitera nullement ; la personne qui frappe, ne sentira presqu'aucune résistance de la rupture du bâton. Mais si l'on frappe moins vîte & plus foiblement, de maniere que le bâton ne se casse point, les deux verres se briseront, l'eau se répandra sur la table, & la personne qui frappe, sentira une assez grande résistance du coup, quoique cependant, la rupture des verres demande beaucoup*

moins d'effort que celle du bâton.

143. *Il en est de même de la résistance d'un bâton ou d'un bois que l'on casse en le frappant contre quelque obstacle immobile ; car plus on augmente la vîtesse du coup, moins on éprouve de résistance de la part de cet obstacle, & moins la rupture du bâton coute d'effort. Ces expériences & d'autres semblables s'expliquent d'une maniere très-claire, par les principes posés ci-devant,* (n°. 86. 142. , & ci-après, n°. 149.) *suivant le systême ordinaire de la proportion des forces des corps en mouvement, & de la grandeur des résistances. Mais il semble que suivant l'autre systême des forces vives proportionnelles aux quarrés des vîtesses, dans lequel on est obligé de supposer les résistances toujours d'une même grandeur, sans aucun rapport aux tems pendant lesquels elles durent ; il semble, dis-je, que ces expériences, sont presque inexplicables ; du moins les explications que l'on en a données, paroissent trop forcées & trop recherchées.*

146. *Comme ces expériences sont très-sensibles & très-frappantes, elles paroissent beaucoup plus propres à décider cette question, sçavoir ; Si les résistances*

sont toujours proportionnelles aux tems pendant lesquels elles durent) que quelques autres expériences proposées en faveur du sentiment contraire ; comme par exemple, d'enfoncer avec la main, un même corps dur dans un corps mol quelconque, à différentes reprises, & avec différentes vîtesses. Quelques personnes ont crû que l'effort nécessaire pour cet effet, étoit plus grand, lorsque la vîtesse de la main étoit plus grande. Mais il semble que l'on peut remarquer, 1°. Que l'augmentation de cet effort, (supposé qu'elle soit réelle,) vient plutôt de ce que le mouvement du bras, de la main, & du corps qu'elle porte, demande plus d'action, plus d'agitation, en un mot, plus d'effort, lorsqu'il est fait avec plus de vîtesse ; soit que l'on enfonce le corps dur dans un corps mol, soit que l'on le meuve simplement en l'air, sans rencontrer aucun obstacle. 2°. Que ces sortes d'expériences sont, pour ainsi dire, douteuses & équivoques, quelques-uns estimant les efforts plus grands dans les plus grandes vîtesses : d'autres les estimant égaux à ceux d'une vîtesse moindre. Il en est de ces expériences comme de celles que l'on pourroit proposer de même, d'enfoncer avec une même

vîtesse des corps durs de différentes figures dans un même corps mol, pour prouver que la résistance de ce corps mol varie suivant la figure des corps durs, comme le jugeroient d'abord le plus grand nombre de ceux qui feroient cette expérience, quoique cependant cette proposition ne soit nullement conforme à d'autres expériences beaucoup plus certaines & plus évidentes, & aux Démonstrations Physiques & Méchaniques de tous les Physiciens. Voyez ci-après les n°. 185. *& suivans, &* 190. *&c.*

147. Soit maintenant un autre corps *K*, plus grand ou plus petit que *C*, & dont la masse soit μ, placé en repos au devant de la suite *A B*, totalement comprimée (de même que ce corps *C* l'étoit dans les n°. 128 & 131.). Il est clair que la roideur *r* ou résistance instantanée de la suite, étant toujours la même, quelle que soit la grosseur des corps *K* ou *C*, (placés au-devant de la suite,) cette résistance produira, (pendant le débandement,) dans ce corps *K*, précisément la même force finie qu'une gravité ou pésanteur différente de la gravité ordinaire ; (en sorte que leurs forces ou puissances fussent

réciproquement proportionnelles aux masses μ & m des corps *K* ou C,) & dont l'intensité, (n°. 29.) dans le corps *K*, fût égale à celle de la gravité ordinaire dans le corps *C*.

146. Or il est démontré par les loix du mouvement des corps pendules qui décrivent en oscillant des figures courbes égales, &c. (*Phil. Nevvt. Instit.* n°. 239.) que si le corps *K* descend la courbe *NM*, par l'action de cette gravité, le tems τ de sa descente, sera au tems t de la descente du corps *C* (dans le cas du n°. 131.) en raison réciproque des racines quarrées des puissances de ces gravités, ou (n°. précédent,) en raison réciproque de $\sqrt{m}$ à $\sqrt{\mu}$. D'où il suit que ces gravités agissant précisément de la même maniere sur ces deux corps differens qui descendent par la même courbe, (ce qu'il seroit aisé de prouver en détail, si la chose en valoit la peine) les vîtesses qu'elles communiqueront à ces corps seront en raison composée de leurs puissances ou gravités & des tems pendant lesquels elles agissent, c'est-à-dire, en raison composée de m à μ, &

de $\sqrt{\mu}$ à $\sqrt{m}$, ou en raison de $m\sqrt{\mu}$ à $\mu\sqrt{m}$, ou enfin de $\sqrt{m}$ à $\sqrt{\mu}$; & par conséquent ces vîtesses v & u seront en raison renversée des racines quarrées des masses μ & m, & que les forces Φ & f produite dans ces corps *K* & *C*, seront :: $\mu v, m u$ :: $\mu\sqrt{m}, m\sqrt{\mu}$ :: $\sqrt{\mu}, \sqrt{m}$; c'est-à-dire, en raison directe & sous-doublée de leurs masses.

147. On prouvera de même, en raisonnant comme dans les n°. 128, 129. & 130. & en comparant l'action de la résistance continuë de la suite *A B*, sur ces deux corps *K* & *C*, avec l'action de ces gravités, que cette suite *A B* produira (pendant son débandement) par sa résistance continuë, une même force Φ, & une même vîtesse v, sur le corps *K* pendant un même tems τ, que ce corps en auroit reçû ou acquis par l'action de cette gravité, en descendant le long de la courbe *NM*. D'où il suit enfin, que cette suite *A B* communiquera toujours par sa résistance continuë dans des corps quelconques *K* & *C*, des forces Φ & f proportionelles aux racines quarrées des masses μ & m de ces corps, & des vîtesses v & u ré-

ciproquement proportionnelles à ces forces ou aux quantités $\sqrt{\mu}$ & $\sqrt{m}$, & cela pendant des tems τ & t directement proportionnels à ces forces : ce qui doit être effectivement de cette maniere, puisque ce n'est que de la plus grande ou moindre durée de ces tems pendant lesquels la résistance continuë de la suite *C*, laquelle reste toujours la même, n°. 93. & 94.) agit sur ces corps *K* & *C*, que dépend la grandeur ou la petitesse des forces qui leur sont communiquées. (n°. 86.)

148. Cette méthode de démontrer la production ou destruction des forces, par la résistance des suites de ressorts, en comparant ces suites à des courbes équivalentes & l'action des ressorts à celle de la pésanteur, a été employée par M. *Camus*, dans les *Mém. de l'Acad. Royale des Sciences de l'année* 1728. pour démontrer l'égalité ou la proportion des forces vives, avec les produits des masses, par les quarrés des vîtesses; & j'ai crû pouvoir en exposer ici plus en détail les principes & les fondemens.

149. On peut démontrer les mêmes propositions, en suivant les principes

des n°. 86. & 122. sur l'estimation des forces & des résistances, lesquels ayant été exposés assés en détail, je me contenterai de le faire en abregé, & par une méthode générale. Soient donc deux corps *C* & *K*. (*figure* 44.) de masses m, & μ, posés en repos au-devant de deux suites de ressorts, *A B*, *FG*, entierement comprimées, dont les longueurs ou ouvertures naturelles *LM*, *ON*, soient nommées, l & λ, les roideurs r, & ρ, variables dans leurs différentes compressions x & ξ. Soient enfin, t & τ, les tems qu'elles employent à se débander & à produire dans les corps *C* & *K*, les forces f & Φ, & les vîtesses u, & v, en supposant toujours 1°. $f = mu$, & $\Phi = \mu v$, & 2°. que x soit à ξ, comme l à λ; & par conséquent, (n°. 44. & 48.) r, à ρ en raison constante,

150. 1°. Si l'on divise les deux tems t & τ, des débandemens de ces suites en un nombre infini & égal de momens infiniment petits dt & $d\tau$ qui soient toujours entr'eux, comme les tems entiers, t & τ; &, 2°. Si l'on compare les forces infiniment petites, df, & $d\varphi$, produites par la résistance des sui-

tes AB, FG, dans les corps C & K pendant les instans proportionnels dt & $d\tau$, lorsque ces suites sont débandées de quantités x & ξ proportionnelles à leurs ouvertures naturelles, comme on vient de dire : on aura, 1°. $df = rdt$, & $d\varphi = \rho d\tau$; & par conséquent (à cause de r, toujours proportionnel à ρ,) $df, d\varphi :: \int df, \int d\varphi :: f, \varphi :: \int rdt, \int \rho d\tau :: rt. \rho\tau :: f$, (comme on l'avoit déja trouvé dans le n°. 147.)

151. 2°. Puisque les bandemens x & ξ des suites AB, FG, sont toujours supposées en proportion constante de l à λ, leurs différences infiniment petites dx & $d\xi$, seront aussi en même proportion de l à λ : ces différences sont encore proportionnelles aux produits des vîtesses variables u & v des corps C & K par les instans dt & $d\tau$; c'est-à-dire, aux produits udt, $vd\tau$, (n°. 2 & 6.) ou aux produits ut & $v\tau$, (à cause de dt, $d\tau :: t$, τ,). On aura donc dx, $d\xi :: l. \lambda :: ut. v\tau$; & par conséquent, $u, v :: \frac{l}{t}, \frac{\lambda}{\tau}$; c'est-à-dire, que les vîtesses variables u & v, que les corps C & K se trouvent avoir acquises par la résistance continuë des

suites AB, FG, lorsque ces suites sont débandées des quantités x & ξ, correspondantes, sont toujours en raison constante de $\frac{l}{t}$ à $\frac{\lambda}{\tau}$ (ce qui est évident non seulement par le calcul précédent, mais encore par la raison que l'action de ces suites AB, FG, sur les corps C & K, est entierement semblable & proportionnelle de part & d'autre,). D'où il suit, que les vîtesses finales u & v de ces corps, seront aussi entr'elles comme $\frac{l}{t}$ à $\frac{\lambda}{\tau}$

152. Or, puisque (n°. 151.) $f.\varphi :: rt.\rho\tau.$ on aura, $t.\tau$, $:: \frac{f}{r}.\frac{\phi}{\rho} :: \frac{mu}{r}.\frac{\mu v}{\rho}$; & par conséquent $u, v :: \frac{l}{t}.\frac{\lambda}{\tau} :: \frac{l}{\frac{mu}{r}}, \frac{\lambda}{\frac{\mu v}{\rho}} :: \frac{lr}{mu}.\frac{\lambda\rho}{\mu v}$; & par conséquent enfin, $muu.\mu vv :: lr.\lambda\rho$. c. q. f. d.

153. Si l'on suppose les deux suites égales en roideur, & en longueur; on aura $lr = \lambda\rho$; & par conséquent, $muu = \mu vv$, ou $m.\mu :: uu.vv$, & de plus, $fu = \varphi v$, ou $f.\varphi :: v.u :: \sqrt{m}.\sqrt{\mu}$. D'où il suit, comme dans le n°. 150.

qu'une même ſuite de reſſorts peut produire, en ſe débandant entierement, dans des corps différens des forces différentes, & réciproquement détruire dans ces mêmes corps, des forces différentes avec leſquelles ils les auroient tous les deux comprimées entierement. Ce qui vient, comme on l'a déja dit, du tems plus ou moins long, pendant lequel la réſiſtance continue de cette ſuite, s'applique ou agit ſur ces corps.

154. Il eſt clair encore par tout ce qui a été dit ci-devant, (n°. 133.) que la réſiſtance continuë de ces ſuites *A B*, *F G*, laquelle produit ou détruit ces différentes forces, *f* ou φ, dans différens corps *K*, communique ou produit des forces entierement ſemblables dans les plans *a b*, *f g*, leſquelles y ſont anéanties par les obſtacles qui retiennent ces plans. D'où il ſuit que ſi ces obſtacles ſont ôtés, ces forces *f* ou φ, ſe conſerveront toutes entieres dans ces plans, & les feront mouvoir en avant avec des vîteſſes convenables, &c. ce qui ſera dans la ſuite appliqué au choc des corps.

155. Si, au lieu d'oppoſer au mouve-

ment direct des corps C ou K des suites de ressort, comme dans le n°. 132. on leur oppose des corps mols qu'ils puissent applatir, ou dans lesquels ils puissent s'enfoncer & consumer, ou perdre toutes leurs forces, en y formant des cavités ; on y voit encore qu'il n'y aura rien de changé dans les calculs & les raisonnemens précédens, que la proportion de r, ou ρ à x, ou ξ, ou de la résistance instantanée d'un même corps mol dans ses différens applatissemens ou enfoncemens laquelle est toujours constante & uniforme, lorsque ces applatissemens ou enfoncemens ont toujours une même étenduë de surface ; ou, (pour ne parler que de ces derniers, sur lesquels seuls on a fait des expériences,) lorsque ces enfoncemens sont produits par des corps égaux en figure & en grandeur. Mais, si ces corps ayant des figures semblables, sont de grandeur différente, dont les diamêtres ou lignes correspondantes soient nommées D & Δ, les résistances des mêmes corps mols seront (toutes choses d'ailleurs égales,) proportionnelles à DD & $\Delta\Delta$. Et si l'on suppose enfin ces corps

mols de différente nature, & qu'on exprime leurs ténacités différentes par r & ρ; on aura encore leurs résistances instantanées & constantes proportionnelles à DDr, & $\Delta\Delta\rho$. *Voyez encore ci-après. Sect.* IX.

156. On peut supposer que les résistances instantanées & variables de différentes suites de ressorts, sont toujours en proportion constante dans les pressions correspondantes de ces suites; ou ce qui est le même, que la somme de toutes les résistances instantanées d'une autre suite quelconque; ou enfin, que les courbes équivalentes à ces suites sont des figures semblables &c. D'où il suit que le mouvement des corps, qui compriment ces suites en se meuvant directement contr'elles, ou qui réciproquement en sont repoussés en avant par leur débandement, quoique continuellement varié pendant la durée de ces compressions ou bandemens, ne laisse pas de suivre, à l'égard de sa somme entiere, les mêmes loix que le mouvement uniforme, lesquelles donnent toujours les espaces proportionnels aux produits des vîtesses par les tems; & par conséquent on pourra toujours

supposer, (en retenant les mêmes expressions algébriques que ci-dessus) l $\lambda :: tu . \tau v$, ou même, $l = tu$, & $\lambda = \tau v$; & par conséquent, si $l = \lambda$, $t . \tau :: v . u$.

157. Comme il arrive dans certains cas que les forces des corps ne sont pas simplement égales aux produits des masses par les vîtesses; mais qu'elles se trouvent augmentées dans d'autres proportions, comme par la longueur des bras de levier ausquelles elles sont appliquées, (ce qui sera expliqué dans les n°. suivans,) Il est évident qu'on doit avoir égard à cette augmentation, en substituant dans les équations précédentes, au lieu de f & φ, le produit des quantités mu & μv, multipliées par le rapport de la longueur des bras de levier ausquels les forces sont appliquées, à la longueur de ceux ausquels sont appliqués les obstacles ou les résistances; & par conséquent, si l'on nomme b & β ces rapports, on aura $f = bmu$, $\varphi = \beta\mu v$; & par conséquent, enfin, 1°. $rt = bmu$, & $\rho\tau = \beta\mu v$: 2°. $\frac{rl}{u} = bmu$,

&

& $\frac{\rho\lambda}{v} = \beta\mu v$, 3°. $rl = bmuu$, & $\rho\lambda = \beta\mu vv$. 4°. (si $r = \rho$,) $l = bmuu$, & $\lambda = \beta\mu vv$.

158. Soit donc *AB* (*fig.* 45.) un levier ou verge infléxible, mobile autour d'un point fixe *A*, & portant à son extrémité *B* un corps pesant *P*, lequel on laisse tomber d'une certaine hauteur finie *Bb* ou βb, en retirant la verge de la situation verticale *Ab*, jusques à la situation verticale *A B*; Soit encore un obstacle *O*, placé premierement en *N*, contre lequel la verge vienne frapper par un de ses points *F*, & ensuite transporté en *M*, en sorte que la même verge le vienne frapper une seconde fois par un autre de ses points *C*. C'est une Proposition démontrée dans la *Méchanique*, que la force avec laquelle cet obstacle sera frappé en *N* par le point *F*, est à la force avec laquelle il sera frappé en *M* par le point *C*, comme la distance *AN* ou *AF*, à la distance *AM* ou *AC*; en sorte que si cet obstacle *O* n'a de force résistante que ce qui suffit pour arrêter & détruire tout le mouvement de la verge, lorsqu'il est placé en *N*. cette force résistante

ne pourra point arrêter ou anéantir le même mouvement de la verge lorsqu'il sera transporté en *M* ; & par conséquent que cet obstacle étant placé en *M*, devra être augmenté dans la proportion de la distance *AM* à la distance *AN*, afin qu'il soit capable de détruire par sa résistance, tout le mouvement de la verge, & toute la force du poids *P*, qui est la cause de ce mouvement.

159. Il s'ensuit de-là que la force avec laquelle un point quelconque de cette verge peut vaincre un obstacle ou une résistance quelconque qu'on lui opposeroit, est réciproquement proportionnelle à la distance de ce point au point fixe *A*. Or la force du point *B*, auquel le centre de gravité du corps *P* est supposé attaché, est égale à la force de ce corps même. Ainsi en nommant cette force f, on aura celle d'un point quelconque $N = f \times \frac{AB}{AN} =$ (en nommant m la masse du corps *P* & u sa vîtesse) $mu \times \frac{AB}{AN}$.

160. Réciproquement, si la distance de l'obstacle au point fixe *A*, reste tou-

jours la même, & que celle du corps *P* varie, on prouvera de la même maniere, que l'effet de la force du corps *P* sur l'obstacle, ou que la force de ce corps à l'égard de cet obstacle, sera directement proportionnelle à sa distance *AP* au point fixe *A*.

VII. *Explication de quelques expériences du Choc des Corps.*

161. Les principes posés dans la Section précédente, expliquent parfaitement & sans aucune difficulté, toutes les expériences dont j'ai parlé, (n°. 120. 121. & 123.) & que l'on peut distinguer en deux sortes, les unes ayant été faites avec des corps dont les uns se meuvoient directement contre d'autres absolument immobiles, ou avec des corps tous également mobiles; soit que les uns fussent en repos, & les autres en mouvement, soit qu'ils se meussent tous les deux. On trouvera toutes ces expériences exposées en détail dans les *Elém. Mathém. de la Physique* de M. *s'Gravesande*, 2e. *édition*, dans le *Journal Historique de la Républ'que des Lettres* des mois

Novembre & Décembre 1733. Tom. 3, & indiquées dans les *Institutiones Philos. Newton.* ausquelles je renvoye entierement le Lecteur. Il suffira de remarquer ici que le résultat de toutes les expériences de la premiere espéce faites, soit avec des corps à ressort, soit avec des corps mols, a toujours donné la grandeur du bandement des ressorts, & la grandeur des cavités exactement proportionnelle au produit des masses des corps par les quarrés de leurs vîtesse, comme on l'a trouvé dans les n°. 152. & 155. en sorte que si leurs masses sont réciproquement proportionnelles aux quarrés de leurs vîtesses, comme dans l'expérience de M. le *Marquis Poleni*, rapportée dans sa Lettre à M. l'*Abbé Conti*, ces cavités seront précisément égales. On a trouvé aussi dans le n°. 156. que les tems des enfoncemens égaux étoient réciproquement proportionnels aux vîtesses des corps, ce qui est différent de l'hypothese de M. de *Crousaz*, qui supposoit ces tems directement proportionnels aux vîtesses, & à laquelle M. le Comte *Riccati* a fait une objection comme on le voit dans la même Lettre de M. *Poleni*.

162. Les expériences rapportées dans le *Journal Historique de la République des Lettres*, par lesquelles on a voulu prouver que la grandeur des forces produites ou détruites, ne dépendoit point de la grandeur des tems, s'expliquent cependant très-bien, en suivant le principe du n°. 153. & des n°. 159 & 160. comme il paroîtra par ces deux exemples. Soit une barre ou verge *CD*(*fig*.46.)suspenduë en pendule au point *C*, & chargée à trois hauteurs différentes, de trois cônes égaux *A*, *B*, *D*; on retire à différentes reprises, cette barre de son point de suspension, en élevant son extrémité *D* toujours à la même hauteur; & l'on oppose ensuite successivement un même obstacle immobile, comme un corps mol, à chacun des cônes *A*, *B*, *D*. Ces cônes qui se meuvent avec le plus de vîtesse lorsque la barre est verticale, produisent séparément trois enfoncemens précisément égaux dans le corps mol, avec des vîtesses proportionnelles à leurs distances, *AC*, *BC*, *DC*; & par conséquent, pendant des tems réciproquement proportionnels à ces mêmes distances. D'où l'on a conclu que la force

de la barre CD, conjointement celle des cônes A, B, D, restant toujours la même, étoit cependant détruite pendant des tems inégaux. Mais si l'on conçoit cette force réünie dans un même point ou centre de percussion O, il paroîtra par le n°. 159. que la vîtesse de ce point O, restant toujours la même, sa force relative à l'égard de l'obstacle placé successivement en différens points, A, B & D, sera réciproquement proportionnelle aux distances CA, CB, CD, ou directement proportionnelle aux tems pendant lesquels elle est détruite, comme on l'a toujours trouvé ci-devant.

163. Soit enfin la même barre en pendule CD, (*fig.* 47) chargée d'un seul cône en D, & d'un corps pésant P, placé à une certaine distance CP, du point fixe C. On éleve le point D à une certaine hauteur que je nomme H, en sorte que le pendule étant arrivé dans la situation verticale, le point D ait acquis une vîtesse proportionnelle à $\sqrt{H}$, & le corps P une vîtesse $= \sqrt{H} \times \frac{PC}{DC}$, sa force relative à l'égard du point D, sera (n°. 159. & 160.) $= m\sqrt{H}$

$\times \frac{PC}{DC} \times \frac{PC}{DC} = m \sqrt{H} \times \frac{PC^2}{DC^2}$. Avec cette force, il produira un certain enfoncement dans l'obstacle immobile ou le corps mol qu'on opposera au point *D* ; & cet enfoncement sera (n°. 157.) proportionnel ou égal à $m \sqrt{H} \times \frac{PC^2}{DC^2}$. Si l'on ôte ensuite le corps *P*, & qu'on attache un autre corps $Q = 4m$, & à la distance $QC = \frac{1}{2} PC$, (comme dans la seconde expérience rapportée dans le *Journal Historique*, *&c.*) & qu'on éleve une seconde fois le point *D* à la même hauteur, *H* la force absoluë du corps *Q* sera $= 4m \sqrt{H} \times \frac{PC}{2DC}$, & sa force relative à l'égard du point *D*, sera $= 4m \times \sqrt{H} \times \frac{PC}{2DC} \times \frac{PC}{2DC} = 4m \times \sqrt{H} \times \frac{PC^2}{4DC^2} = m \sqrt{H} \times \frac{PC^2}{DC^2}$ à la force relative du corps *P*; & par conséquent le nouvel enfoncement produit par la force du corps *Q*, égal à celui qui a été produit par celle du corps *P*, conformément à l'expérience.

164. On peut remarquer que cette

expérience, & même toutes celles qui sont contenuës dans le même Journal; sont plutôt contraires que favorables à l'opinion des forces vives; car si l'on avoit supposé les forces absoluës des corps *P* & *Q*, proportionnelles aux produits de leurs masses par les quarrés de leurs vîtesses, on auroit trouvé ces deux forces égales entr'elles, & à la quantité $m \times H \times \frac{PC^2}{DC^2}$, & ces deux forces devant être diminuées dans le rapport des distances *PC* & *QC* à la distance *CD*, (comme on n'en sçauroit raisonnablement douter, suivant les principes les plus certains de la Méchanique) on trouveroit les deux enfoncemens proportionnels à $\frac{PC}{DC}$ & $\frac{QC}{DC}$ ou $\frac{PC}{DC}$ & $\frac{PC}{2DC}$; c'est-à-dire, le dernier enfoncement deux fois moindre que le premier contre l'expérience.

165. Il n'est pas plus difficile d'expliquer l'expérience rapportée dans les *Elém. Mathém. de la Physique* de M. *s'Gravésande*, Liv. 1. ch. 22. Expér. 4. dans l'addition qui suit l'avertissement, si l'on considere qu'une force double ayant

ayant à vaincre une résistance quadruple, sera détruite dans un tems deux fois plus court, comme on l'a vû dans le n°. 151.

165. Je ne m'arrêterai pas davantage aux expériences de cette espece que l'on pourroit encore beaucoup plus varier, puisqu'il n'en est aucune dont l'explication & la démonstration ne soit facile à déduire des n°. 151, 156. & suivans; je passerai à présent à celle du choc des corps proprement dit. Soient, par exemple, deux corps durs égaux ou inégaux, *A* & *B* (*figure* 48.) avec un ressort *C*, appliqué au corps *A*, & entierement débandé, que le premier *A* soit en repos, & que le second *B* se meuve directement contre lui de *a* en *b*, avec une vîtesse finie *v* : Il est clair que dans le premier instant *dt*, que ce corps *B* viendra à rencontrer le ressort *C*, il comprimera ce ressort d'une quantité infiniment petite *dx* & que la résistance de ce ressort détruira dans le corps *B* un dégré infiniment petit de force *df*, & de vîtesse *dv* & communiquera par les raisons des n°. 88. 132, &c. un semblable dégré infiniment petit de force *df* au corps *A*,

& un dégré de vîtesse *dv* , plus ou moins grand que celui *dv* qu'elle détruit dans le corps *B* , suivant que la masse du corps *A* sera moindre ou plus grande que celle du corps *B*: De même encore pendant la durée du second instant, & de chacun de tous les suivans, pendant lesquels la vîtesse du corps *B* sera plus grande que celle du corps *A*; le ressort *C* sera comprimé par le mouvement du corps *B*, des quantités infiniment petites *dx* , & détruira par sa résistance continuë dans le même corps *B*, des forces infiniment petites *df*, & communiquera ou produira dans le corps *A* de semblables forces infiniment petites *df*, & des dégrés infiniment petits de vîtesse *dv* , ou la vîtesse finie *u* produite de cette maniere dans le corps *A* , sera devenuë égale à la vîtesse restante du corps *B* : alors le ressort *C* cessera d'être comprimé ou bandé & il commencera à se débander en éloignant les deux corps *A* & *B* l'un de l'autre, & en produisant ou détruisant dans ces corps, pendant toute la durée de son débandement, des forces finies *f* égales entr'elles, & à celles qu'il leur avoit produites ou détruites

pendant son bandement.

166. Il faut remarquer sur cette explication ; 1°. Que les forces *f* détruites ou produites dans les corps *A* & *B*, pendant le bandement du ressort *C* est comme on l'appelle, un *ressort parfait*, (n°. 42.) Mais dans tout autre cas: lorsque ce ressort est *imparfait*, ces dernieres forces *f* sont toujours moindres que les premieres, de maniere, 2°. Que si au lieu du ressort *C*, on suppose seulement un corps mol *K*, (*figure* 48.) appliqué au corps *A*, ce corps mol *K* ne résistera au mouvement du corps *B*, que pendant son applatissement, & détruira par sa résistance continuë, (suivant ce qui a été dit dans les n°. 100. & suivans,) dans le corps *B*, & produira dans le corps *A* précisément les mêmes forces *f* finies & égales, que le ressort *C* y auroit de même détruit ou produit. Mais dès que ce corps mol *K* cessera d'être applati, (parce que les deux corps *B* & *A* se mouvront en avant avec une même vîtesse,) il cessera aussi de faire aucune résistance, & de détruire ou produire aucune force dans les corps *B* & *A*. 3°. Qu'il revient au même par rapport au choc

des corps mols ou à ressort, de supposer ces corps parfaitement durs, & non élastiques, &c. mais séparés l'un de l'autre par un seul corps mol ou un seul ressort, ou de concevoir ces corps eux-mêmes mols ou élastiques, comme ils le sont effectivement. Enfin, 4°. Que cette explication satisfait également, & à l'expérience, (comme on le verra dans le n°. suivant,) & à la raison qui demande que l'on ait égard à la force nécessaire pour bander ou comprimer les particules élastiques des corps à ressort, & pour applatir celle des corps mols. Or l'on vient de voir que la Théorie précédente explique très-bien comment la force qui se détruit dans l'un des corps, comme *B*, comprime le ressort *C*, & se communique en même tems, (par l'entremise de ce ressort) au corps *A*, sans que cette communication diminuë en rien l'effet de cette force sur le ressort *C*.

167. On peut déduire aisément des n°. précédens, les regles ou formules ordinaires du choc des corps mols & à ressort; ce que je ferai voir ici en peu de mots. Supposez, 1°. que le corps *A* soit en repos, & que le corps *B* se meu-

ve directement contre lui avec une vîtesse V; il est clair, par ce qui a été dit ci-devant, que le corps A ayant commencé a atteindre le corps mol K, ou le ressort C continuera à l'applatir ou à le bander, jusques à ce que la vîtesse communiquée au corps A, soit égale à la vîtesse restante du corps B; & que dans ce tems la force communiquée au corps A sera égale à la force détruite dans le corps B : Ainsi, en nommant u la vîtesse communiquée au corps A, sa force sera $= Au$, la vîtesse perduë dans le corps B sera $= V - u$, & sa force perduë $= BV - Bu = Au$, d'où l'on tire $u = \frac{BV}{A+B}$

168. Si ces corps A & B ne sont séparés que par un corps mol, ils continueront de se mouvoir ensemble avec cette vîtesse $u = \frac{BV}{A+B}$. Mais s'ils sont separés par un ressort parfait C, ce ressort se débandera & détruira, en se débandant, dans le corps B la même force $BV - Bu$ qu'il y avoit détruite pendant son bandement, & il communiquera au corps A précisément la même force ; si ce ressort est imparfait,

ces deux forces détruites & produites, seront moindres dans un certain rapport que je supposerai $= r$, d'où l'on tirera la force du corps B, après le choc, $= BV - BV + Bu - rBV + rBu =$ (en mettant pour u sa valeur $\frac{BV}{A+B}$) $\frac{BBV}{A+B} \times \overline{r+1} - rBV$, & sa vîtesse sera $= \frac{BV - rAV}{A+B}$. La force du corps C sera $= Au + rAu = \frac{ABV}{A+B} \times \overline{r+1}$, & sa vîtesse $= \frac{BV}{A+B} \times r+1$.

169. Il est aisé de voir que ces formules s'accordent parfaitement avec celles qui ont été démontrées par plusieurs Auteurs, comme Messieurs *Carré*, *s'Gravesande*, *Huygens*, *Bernoulli*, *le Pere Mazieres*, *&c.* aux écrits desquels je renvoye le Lecteur sur tous les autres cas du choc des corps, pour éviter des répétitions ennuyeuses ; d'autant plus que leurs formules se peuvent démontrer aussi facilement par le moyen des principes précédens : mais il convient d'ajoûter encore quelque chose sur la formation des cavités ou enfoncemens dans les

corps mols, par le choc des corps, & de faire voir comment les principes que j'ai suivis jusques ici, s'accordent encore à cet égard avec les expériences, ce que l'on verra dans la Section IX. après avoir établi auparavant d'autres principes sur les pressions, & les résistances obliques.

VIII. *Des Pressions & des Résistances Obliques.*

170. Soient *A C*, *BD*, (*figure* 49.) deux plans obliques qui forment entre eux un angle quelconque *AGB*, & entre lesquels on ait posé un corps pésant *P*. Si du centre de gravité *F* de ce corps, on tire les lignes *Fg*, *Fh*, perpendiculaires sur les plans *A C*, *B D*, & la ligne verticale *Ff*, & que des deux lignes *Fg*, *Fh*, comme côtés, on forme un parallelograme *Fgfh*, qui ait pour diagonale la verticale *Ff*. Il est démontré dans les Méchaniques, 1°. Que la pression du corps *P* sur le plan *AC*, est à sa pression sur le plan *BP*, comme le côté *Fg* au côté *Fh*. 2°. Que l'une ou l'autre de ces pressions est au poids de ce corps comme l'un

ou l'autre de ces côtés à la diagonale *Ff*. 3°. Que si ces deux plans *AC*, *B D*, sont soutenus par des appuis *AM*, *BN*, ou autrement sur un troisiéme *M N* lequel soit horisontal, la pression soufferte par ce troisiéme *M N* sera précisément égale au poids du corps *P*.

171. De là, il suit que la résistance ou réaction, (n°. 19.) de ces trois plans *AC*, *BD*, *MN*, contre les pressions obliques *Fg*, *Fh*, ou verticale *Ff* du corps *P*, sont entr'elles respectivement & au poids de ce corps, comme les lignes *Fg*, *Fh* ou *Ff* à cette même diagonale *Ff*.

172. Si entre le corps pésant *P* & les plans *AC*, *BD*, (*figures* 80. & 51.) on place deux suites de ressorts *R* & *S*, ou deux corps mols *T* & *V* égaux en étenduë de surface, en roideur ou en ténacité, & que du centre de gravité *F* du corps *P*, on tire sur les surfaces de ces suites de ressorts ou de ces corps mols, (lesquelles on suppose paralleles aux plans *AC*, *BD*,) les perpendiculaires *Fg*, *Fh*, & que l'on construise comme ci-devant le parallelogramme *Fgfh*, dont la diagonale

Ff est une ligne verticale passant par le centre *F*. On prouvera de même que les pressions obliques du corps *P* sur ces suites de ressorts *R S*, ou sur ces corps mols *T*, *V*, de même les résistances ou réactions de ces suites ou de ces corps sont entr'elles, & au poids du corps *P*, comme les lignes *Fg*. *Fh*. & *Ff*.

173. Il suit de là, que les forces infiniment petites *df* détruites pendant chaque instant *dt*, dans le corps *P*, par les résistances continuës de ces suites de ressorts, ou de ces corps mols, sont encore entr'elles & aux forces infiniment petites communiquées par la gravité au corps *P*, (pendant les mêmes instans,) dans la même proportion de ces lignes *Fg*. *Fh*. & *Ff*; & par conséquent enfin, par le n°. 86. les forces finies *f* détruites pendant des tems finis *t* par ces mêmes résistances continuës dans le corps *P*, seront entr'elles, & à la force finie communiquée par la gravité pendant ce tems *t* au corps *P*, en raison composée de ce tems & des lignes *Fg*, *Fh*, & *Ff*.

174. Si l'on décompose la résistance *F h* de l'un des ressorts *R S* ou

des corps mols *T*, *V*, contre le poids *P*, en deux autres résistances *FH*, *Hh*, l'une verticale *FH*, & l'autre horisontale *Hh*; & de même la résistance *Fg*, de l'autre ressort, ou de l'autre corps mol dans la résistance verticale *FG*, & l'horisontale *gG*. Il est clair par la propriété du parallelogramme *Fgfh*, que les lignes *gG*, & *FG*, sont égales aux lignes *Hh* & *Hf*; & par conséquent, que les résistances horisontales *gG* *hH*, des deux ressorts ou des deux corps mols étant égales entr'elles, & opposées dans leurs directions paralleles, peuvent être conçûës comme se détruisant réciproquement, & que la somme $FH + FG$, ou $fH + Hf$ de leurs résistances verticales, étant précisément égale à la pression totale *Ff* du corps dur *P*, ces résistances verticales peuvent être considérées comme les seules qui s'opposent à la descente de ce corps, en détruisant continuement, (n°. 15.) les forces infiniment petites *df*, que la gravité lui communique de même continuement. D'où il suit que ce que ce corps *P* perd de force à chaque instant dans la direction *Ff* de son mouvement de descente par

les résistances continuës & obliques *Fg*. *Fh*, des ressorts ou corps mols, peut être conçû comme détruit, par les seules résistances perpendiculaires *FH*, *FG*; ou par leur somme *Ff*; ces autres résistances horisontales *gG*, *hH*, pouvant être conçûës comme se détruisant elles-mêmes réciproquement, ainsi qu'il vient d'être dit.

175. Soit encore un corps, (*figure* 52.) dur & pésant *P*, placé entre quatre ressorts égaux, ou quatre corps mols *V*, *u*, *t* *T*, posés sur les plans *AC*, *BD*. 1°. Si l'on conçoit la pression de ce corps *P*, comme divisée en deux parties *Ff*, *fφ*, dont la premiere *Ff* agit sur les ressorts ou corps mols *T* & *V*, & la seconde *fφ* sur les ressorts &c. *t* & *u*. 2°. Si l'on forme comme ci-devant, deux parallelogrammes différens, dont les côtés correspondans expriment les pressions obliques de ce corps dur *P* sur les ressorts, *T*, *V*, *t*, & *u*, ou les résistances obliques de ces mêmes ressorts; & 3°. Si l'on décompose ces résistances obliques en verticales & horisontales. On prouvera par des raisonnemens semblables aux précédens; 1°. Que ce que le corps

dur *P*, perd de force dans la direction verticale *Ff* par les résistances continuës & obliques de ces quatre ressorts ou corps mols, est détruit par leurs seules résistances verticales, & que leurs résistances horisontales se détruisent mutuellement. 2°. Que la somme de toutes les résistances verticales de ces mêmes ressorts, &c. est précisément égale à la pression entiere du corps dur *P*; de même, 3°. Que la pression soufferte par un troisiéme plan *MN*, sur lequel les deux autres *AC*, *BD*, seroient soûtenus. (On fait encore ici abstraction du poids des ressorts ou corps mols, *T*, *V*, *u*, *t*, & des plans *AC*, *BD*.)

176. On peut remarquer que la grandeur des résistances obliques *Fg*, *fγ*, *fh* & *fn*, des ressorts ou corps mols, *T*, *t*, *V*, *u*, est égale pour chacun d'eux, quoique leurs directions *Fg*, *fγ*, *Fh*, & *fn*, soient differemment inclinées à la direction verticale *Fφ*, de la pression du corps *P*, ce qui sera mieux expliqué dans les n°. suivans.

177. Soit, (*fig.* 53. & 54.) un corps dur & pésant *P*, placé premierement

(*figure* 53.) sur deux ressorts ou corps mols égaux, *t* & *u*, lesquels sont eux-mêmes placés sur les plans *A C*, *BD*, & ensuite, (*Figure* 54.) sur deux autres ressorts ou corps mols, *T*, *V*, égaux aux précédens, & posés sur les plans *A C*, *B D* : mais, ensorte que la position de ces derniers soit beaucoup plus panchée vers la verticale *Ff* tirée par le centre de gravité *F* de ce corps, & par conséquent la direction des résistances obliques *gF*, *hF* des ressorts *T* & *V*, soit plus inclinée à l'horison que celle des résistances obliques des ressorts *t* & *u*. Si l'on exprime le poids du corps *P*, ou la pression entiere de ce corps, par les diagonales égales & verticales *Ff*, *F*φ, des parallelogrammes *Fgfh*. *F*$\gamma\varphi$*n*. Il est démontré dans la Méchanique que les pressions de ce même corps sur les ressorts *T*, *V*, *t*, *u*, seront exprimées par les lignes *Fg*, *Fh*, & *F*γ, *Fn*. D'où il suit, que les pressions *F*γ. *Fn*, étant plus grandes que les pressions *Fg*. *Fh*, les ressorts *T* & *V* seront plus comprimés que les ressorts *t* & *u*, & que les résistances de ces mêmes ressorts *T* & *V* étant égales aux pressions *F*γ, *Fn*, se-

ront plus grandes en même proportion que les résistances des ressorts *t* & *u*, lesquels sont égales aux pressions *Ff*, *Fh*.

178. Il s'ensuit encore (par les n°. 77. 78. 106. & 107.) que pour rendre les compressions ou les applatissemens des ressorts ou des corps mols *T* & *V*, égale à celles des ressorts ou des corps mols *t* & *u*, il faudra augmenter leur étenduë de surface dans la même proportion que leurs pressions ou résistances *Fγ*, *Fκ*, sont plus grandes que les pressions ou résistances *Ff*, *Fh*, des autres ressorts *t* & *u*.

179. On peut aisément conclure de là, que si les ressorts ou corps mols, *T*, *V*, *t*, *u*, de la *Figure* 52, sont supposés égaux en roideur, ou en ténacité, ou en étenduë de surface, & qu'ils soient de plus également comprimés ou applatis, (comme on l'a toujours supposé dans les n°. 175. & 176.) leurs résistances obliques seront égales.

180. Dans ce cas, la pression totale du corps *P*, représentée par la somme des diagonales *Ff*, *fφ* devra être divisée,) comme dans le n°. 175.) en deux parties inégales : la partie *fφ*

étant plus grande à proportion que la direction des résistances obliques *F*γ, *F*κ, est plus inclinée à la verticale *F*φ.

181. Soit, (*Figure* 55.) à présent, le même corps *P*, enfoncé par la force de son propre poids, dans un grand corps mol *M*, dont je considérerai premierement les petites particules, comme de petits ressorts tous égaux en roideur, en figure, en grosseur, &c. Il est clair, 1°. Que tous ces petits ressorts seront également comprimés dans toute l'étenduë de ce corps mol *M*, ceux qui se trouvent directement placés en *m*, sous le côté horisontal & inférieur du corps dur *P*, n'étant point plus comprimés que ceux qui se trouvent placés dans quelqu'autre endroit tel que *n*, vers un côté vertical de ce même corps *P* : car si les ressorts placés en *m* étoient d'abord les plus comprimés, ils comprimeroient ceux qui les environnent ou qui les touchent de tous côtés, (ce que l'on prouvera en raisonnant à peu près de même que dans les n°. 61. & suivans) ceux-ci en comprimeroient d'autres plus éloignés, & ainsi de suite jusques à ce qu'ils se trouvassent tous dans le

même dégré de compression.

182. 2°. Il suit de là & du n°. 180, que les résistances obliques de tous les petits ressorts qui environnent & qui touchent immédiatement le corps *P* sont égales entr'elles, & du n°. 175. que la somme de toutes leurs résistances verticales, est précisément égale à la pression entiere de ce même corps, & que leurs résistances horisontales, se détruisent mutuellement. Enfin, 3°. Que si ce même corps *P* étoit posé de plat, comme dans la *Figure* 56. sur une seule courbe de ces petits ressorts égaux; les petits ressorts de cette couche, (dont la surface *AB* seroit égale à la surface platte du corps *P*,) ne seroient point plus comprimés que ceux du grand corps mol *M*, ou que ceux de la couche qui environne immédiatement le corps dur *P*, (laquelle est égale à la surface courbe de ce corps,) & que la somme des résistances directes & verticales de tous les petits ressorts de la couche platte *AB*, seroit précisément égale à la somme de toutes les résistances verticales des petits ressorts du corps mol *M* qui environnent le corps dur *P*, & égale par conséquent

conséquent à la pression de ce corps ; ce qui sera prouvé dans les n°. suivans.

183. Pour démontrer plus facilement cette derniere Proposition, je supposerai que le corps *P* est une espece de Prisme, ayant une base plate & horisontale *AB*, & ses deux Sections verticales paralleles & égales entr'elles, l'une desquelles soit *ACD*. Mais quelle que soit la figure du corps *P*, comme par exemple, celle d'un solide formé par la révolution de la courbe *ACB*, autour de l'axe *DC*; cette proposition demeurera toujours vraye à son égard ; ce que l'on trouvera par une méthode semblable à la suivante, quoique un peu plus composée, & on peut le voir démontré d'une autre maniere, dans la Prop. X. du 1er. Liv. de la *Phoronomie* de M. *Hermann*.

184. Que la surface courbe *ACB* de ce corps dur *P*, laquelle est égale à celle de la couche des ressorts qui lui résistent immédiatement, soit supposée divisée en un nombre infini de petites parties, ou de petites couches horisontales toutes égales entr'elles, ayant leurs longueurs égales à l'épais-

seur du corps *P* & leurs largeurs infiniment petites comme *E e* égales à chacun de ces petits ressorts égaux. Des deux points *E* & *e*, soient tirées sur l'horisontale *ADB*, les deux ordonnées verticales & infiniment proches, *EG*, *eg*, & de plus, la petite ligne *Eh* parallele à *ADB*, & la petite ligne *Ei* perpendiculaire à la surface courbe au point *E*. Il est clair, 1°. Que les petits ressorts, comme *Ee*, (contenus en nombre égal dans chaque petite couche,) étant également comprimés, leurs résistances obliques contre la pression du corps *P*, seront toutes égales entr'elles, (ce que l'on prouvera comme dans le n°. *66*.) & qu'elles agiront suivant les directions *Ei*, perpendiculaires à la surface de ce corps. 2°. Si cette ligne *E i* représente ces résistances obliques, les petites lignes *i h* *h E*, représenteront les résistances verticales & horisontales, (ce que l'on prouvera en décomposant ces résistances obliques *E e*, comme dans le n°. 174.) 3°. Les petits triangles *i h F*, *E he*, étant équiangles, seront aussi proportionnels, d'où l'on aura *E i. E e* :: *h i. h E* :: *h E. he*; & par consé-

quent, si les petites lignes toutes égales *eE*, représentent les résistances obliques des ressorts, ou des couches qui en sont composées, les petites lignes *hE* & *h e*, ou leurs égales *g G*, *o O*, représenteront leurs résistances verticales & horisontales. 4°. La somme de toutes les petites lignes *e E*, prises sur la moitié *B C* de la surface courbe *BCA*, est égale à la grande ligne courbe *B E C*, la somme des petites lignes *h E*, ou *g G* égale à l'horisontale *DB*, & la somme des petites lignes *h e* ou *o O*, égale à la verticale *D C*; d'où il suit que les petites *e E* représentant toujours les résistances obliques de chaque petite couche, la grande ligne courbe *BC*, représentera la somme de toutes ces résistances obliques, l'horisontale *DB*, la somme de toutes leurs résistances verticales, & la verticale *DC*, la somme de toutes leurs résistances horisontales. 5°. On prouvera la même chose de l'autre moi- *A C*, de la surface courbe du corps *P*, soit que la courbure, de cette moitié, soit semblable ou différente de celle de la moitié *B C*: d'où il suit que la somme des résistan-

ces horisontales des ressorts qui résistent contre cette moitié *B C*, étant égale & directement opposée à la somme des résistances horisontales des ressorts qui résistent contre la moitié *AC*; ces deux sommes ou ces deux résistances totales peuvent être considérées (comme dans le n°. 174.) comme se détruisant elles-mêmes réciproquement, & ne détruisant par conséquent aucune partie de la force que la gravité communique continuellement au corps *P*, de sorte qu'il ne restera que les sommes *AD*, & *DB* des résistances verticales, lesquelles détruisent seules, & immédiatement toute cette force & empêchent par là même le corps *P* de descendre ou de s'enfoncer plus avant; & par conséquent, 6o. la somme de ces seules résistances verticales sera précisément égale à la pression entiere de ce corps. Or, 7°. cette somme des résistances verticales étant à la somme de leurs résistances obliques, comme la surface platte *A B*, (*figures* 55. & 56.) du corps *P* à sa surface courbe *ACB*, il est clair que cette premiere somme sera précisément égale à celle des résistances directes & verticales de tous les petits ressorts, qui dans

la *Figure* 56. résistent contre la surface plate *A B*, pourvû que tous ces ressorts soient autant comprimés que ceux du grand corps mol *M*; & par conséquent cette derniere somme sera aussi précisément égale à la pression ou au poids du corps *P* : d'où il suit enfin que tous les petits ressorts sur lesquels le corps *P* est placé dans la *Figure* 56. étant pressés par sa surface platte, pourront sans être ni plus ni moins comprimés que ceux du grand corps mol *M*, supporter toute la pression du corps dur *P*, & lui opposer une résistance précisément égale à celle qu'il éprouve, lorsqu'il est enfoncé par la force de son poids, dans le grand corps *M*, c. q. f. d.

185. On a considéré jusques ici, les particules du corps mol *M*, comme de petits ressorts égaux. Pour mieux faire comprendre l'égalité des résistances obliques de toutes les petites portions ou couches *E e*, de la surface courbe *ACB*, & la décomposition de ces résistances obliques en horisontales, & en verticales, laquelle décomposition est réçûe de tous les Physiciens & Géomêtres, comme on peut le voir dans plusieurs traités de Méchanique,

& principalement dans la *Phoronomie de M. Hermann*, n°. 249. 252. 305. & ailleurs, dans laquelle on trouvera même la démonstration & l'usage assez étendu, d'une proposition très-semblables à celle du n°. 184. ainsi que je l'ai déja dit.

186. Quoique la nature des corps mols, ne soit point la même que si leurs particules étoient à ressort, & que leur résistance vienne uniquement de la difficulté avec laquelle leurs petites parties peuvent être désunies ou séparées les unes des autres par le mouvement des corps durs qui y forment des applatissemens ou des enfoncemens, (ce que l'on appelle autrement leur ténacité), il paroît cependant que les résistances obliques des mêmes portions égales à la surface courbe *ACB*, seront encore toutes égales entr'elles; & cela, 1°. parce que, (selon le principe du n°. 117.) cette résistance ne dépend point de la grandeur des petits enfoncemens partiels que ce corps dur *P* produit à chaque instant *d t*, en s'enfonçant dans le corps mol *M*; & par conséquent, quoique ces petits enfoncemens soient différens dans tou-

tes les petites parties *Ee.* cependant, 2°. comme ils sont produits pendant les mêmes instans égaux, sur des petites surfaces égales, & d'une égale tenacité, (en supposant comme dans le n°. 111. les petites parties *Ee* du corps mol incompressibles). Il s'ensuit, par les principes des n°. 105 & 114. que leurs résistances obliques, lesquelles agissent suivant des directions perpendiculaires à la surface du corps dur, seront toutes égales entr'elles.

187. Cette maniere de considérer les résistances des petites parties *Ee*, comme agissantes selon des directions perpendiculaires à la surface du corps *P*; (& par conséquent obliques à l'horison,) & de les décomposer en verticales & horisontales, étant, comme on vient de le dire, n°. 184. parfaitement conforme aux principes employés par les plus célébres Géomêtres, dans la *Méchanique* ou *Statique*, & l'*Hydrostatique.* (Voyez là-dessus la *Méchanique* de M. *Varignon*, *Sect. VIII.* & *X.* & la *Phoronomie* de M. *Hermann.* Liv. I. & Liv. II. Sect. I), sur les pressions & sur les résistances, soit des corps solides, soit des corps

fluides. Elle paroît devoir être très-légitimement admise dans la Théorie présente de la résistance des corps mols. Ce qui étant posé, on trouvera qu'il est impossible d'accorder le principe dont on a parlé dans les n°. 38. & suivans, & dont on a tâché de prouver le contraire dans les n°. 92. & 117, avec la Proposition du n°. 182. laquelle est cependant très-conforme à l'expérience & aux démonstrations de M. *Hermann.* (Voyez l'endroit cité.) Ces principes, dis-je, de la perpendicularité des résistances du corps mol *M*, à la surface du corps dur *P*, & de la décomposition de ces résistances, pourroient être démontrés incompatibles avec le principe de l'augmentation de ces résistances proportionnelle à la grandeur des enfoncemens, produits dans chaque petite partie *Ee* : Mais comme on peut la trouver aisément de soi-même, je ne l'ajoûterai pas ici pour éviter d'être long. On peut cependant conclure de là, avec encore plus de raison qu'auparavant, que le principe du n°. 38. doit être rejetté; & ceux au contraire, des n°. 92. & 117. reçûs comme vrais, quoique à la

premiere

premiere vûë, ils ne parussent pas assez vrai-semblables.*

IX. *Des enfoncemens produits dans des Corps Mols par le choc des Corps Durs.*

188. Pour faire usage de la proposition du n°. 182. & en déduire les résistances, que des corps durs qui se meuvent contre des corps mols, éprouvent, ou souffrent par la ténacité des parties de ces corps, il faut premierement déterminer leurs résistances instantanées, lorsque leurs forces & leurs vîtesses finies sont supposées connuës à chaque instant. Soit donc *M*, (*figure* 55.) un corps mol, dont la tenacité *r* (toujours constante ou uniforme, no. 155.) soit telle, que sa surface *ab* pût soûtenir, sans s'affaisser ou s'enfoncer, un corps *M*, dont la surface inférieure soit $= e$, & la masse $= \mu$; & par conséquent, le poids, (no. 23.) $= \frac{\mu d v}{d t}$, Cette tenacité étant d'autant plus grande que la masse μ du corps *M*, est plus grande, & sa surface e plus petite; on aura cette tenaci-

* Voyez les *Mémoires de l'Académie de Petersbourg*, Tom. III. pag. 222. dans la sixiéme Partie de la Dissertation de M. *Daniel Bernoulli*, sur la résistance des fluides.

té $= \frac{\mu d v}{e d t} =$ (n°. 5.) $\frac{\mu v v}{2 e s}$.

189. Soit de plus, un autre corps *P*, dont la maſſe ſoit *m*, & les différentes coupes ou ſections horiſontales *A B*, leſquelles ſe trouvent à chaque inſtant dans le plan de la ſurface *ab* du corps mol *M*, à meſure que le corps *P* s'enfonce dedans; ces coupes ou ſections horiſontales, étant ſuppoſées proportionnelles aux quarrés de ces demi-diamêtres *AD*, (μ) conſtans ou variables; cette proportion étant exprimée par la grandeur arbitraire *n*, ces Sections ſeront $= n\,yy$, la réſiſtance inſtantanée que ce corps *R* éprouvra en s'enfonçant d'une quantité infiniment petite *dx*, ſera proportionnelle; 1°. à la tenacité du corps mol, $= \frac{\mu v v}{2 e s}$; 2°. (par la Prop. du n°. 182.) à la ſection *AB* z $n yy$, & 3°. à la durée de cet inſtant *dt*. Or ſi l'on nomme *V* la vîteſſe initale du corps *P*, & *u* la vîteſſe perduë par la réſiſtance du corps mol pendant la durée de l'enfoncement *ACB*, on aura la vîteſſe reſtante du corps *P* $= V - u$; & par conſéquent, $dt =$ (n°. 2. & 6.) $\frac{dx}{V-u}$.

190. La résistance instantanée du corps mol M, sera donc $= \frac{\mu vv}{2es} \times nqq \times \frac{dx}{V-u} =$ à la force infiniment petite df, détruite pendant ces instans $= mdu$. On aura donc enfin $\frac{\mu vv}{es} \times nqqdx = 2mVdu - 2mudu$; & par conséquent, $\frac{\mu vv}{es} \times \int nqqdx = 2mVu - muu = m \times \overline{VV - \overline{V-u}^2}$.

191. Or 1o. la quantité $\int nqqdx$, exprime le volume ou la solidité ACB du corps P, enfoncé dans le corps mol M ou la grandeur de l'enfoncement. 2o. La quantité $\overline{V-u}^2$ exprime aussi le quarré de la vîtesse restante au corps P, après qu'il a produit cet enfoncement. D'où il suit que les enfoncemens produits dans des corps mols de différente tenacité, par des corps durs qui se meuvent contr'eux sont directement proportionnels aux produits des masses de ces corps, par la différence des quarrés de leurs vîtesses initiales, & de leurs vîtesses restantes, & réciproquement proportionnels à leurs propres tenacités ; & par consé-

quent les enfoncemens produits par des corps qui perdent en les formant, toutes leurs vîtesses initiales, sont (toutes choses d'ailleurs égales) proportionnels aux quarrés de ces mêmes vîtesses initiales.

192. A l'égard des tems t, ou de la durée des enfoncemens, on peut remarquer, que si différens corps de figures semblables, mais de masses m & de vîtesse u différentes, se meuvent contre un même corps mol & y produisent des enfoncemens c de figures semblables, en perdant toutes leurs vîtesses; il est clair par le n°. précédent, que ces enfoncemens c seront proportionnels aux quantités muu, & proportionnels encore aux cubes de leurs longueurs l, ou de leurs diamêtres D; c'est-à-dire, proportionnels aux quantités l^3; d'où l'on tire muu $= l^3$, & $u = \frac{l^3}{mu}$, & $\frac{l}{u} = \frac{mu}{ll} = \frac{f}{ll}$ Or, suivant la remarque du n°. 155. les tems t sont proportionnels aux quantités $\frac{l}{u}$, ou $\frac{f}{ll}$: on aura donc enfin f, ou les forces détruites par la résistance d'un même corps mol proportionnelles aux quantités llt ou DDt;

c'est-à-dire, aux produits des surfaces des enfoncemens multipliées par les tems t, pendant lesquels cette résistance a duré, ce qui revient aux n°. 105. 146. 154. & 164.

193. On trouve aussi t^3 proportionnel à $\frac{l^3}{u^3}$ ou (puisque $l^3 = muu$) proportionnel à $\frac{muu}{u^3}$, ou enfin à $\frac{m}{u}$. Voyez *Phil. Nevvt. Instit.* n°. 324.

194. on peut en plusieurs cas, par le moyen du calcul différentiel & intégral, déterminer immédiatement la valeur de ce tems t, lorsque la figure du corps P, ou de l'enfoncement est donnée : mais cette recherche n'étant pas de grand usage pour cette Théorie, je n'en donnerai qu'un seul exemple, qui servira de démonstration à l'Art. 325. du Livre que je viens de citer. (*Philos. Nevvt. Instit.*) Soit donc le corps P, (*fig.* 55.) un solide formé par la révolution d'une parabole autour de son axe CD, & que le paramêtre de cette parabole soit $= p$. On aura 1°. $px = yy$, & $yydx = pxdx$. 2°. La grandeur n de l'équation du n°. 190. exprimera le rapport constant de

la circonférence du cercle à son diamêtre ; & par conséquent, 3°. $\int nyy\,dx$ sera $\frac{npxx}{2}$, & $\frac{\mu vv}{es} \times \int nyy\,dx = \frac{\mu vvnp}{2es} \times xx =$, (n°. 190.) $V^2 - \overline{V-u}^2 \times m$, d'où l'on tire $V^2 - \overline{V-u}^2 = \frac{\mu vvnp}{2esm} \times xx$, & $\overline{V-u}^2 = VV - \frac{\mu vvnp}{2ems}, \times xx$. & $V - u = \sqrt{VV - \frac{\mu vvnp}{2esm} \times xx}$.

Or, (n°. 189.) $dt, = \frac{dx}{dx}$ $= \frac{dx}{V-u} =$

$$\frac{dx}{\sqrt{VV - \frac{\mu vvnp}{2esm} \times xx}} = \frac{dx\sqrt{\frac{2esm}{\mu vvnp}}}{\sqrt{\frac{2esm}{\mu vvnp} \times VV - xx}}.$$

Or, il est connu par les regles du calcul différentiel que cette différentielle $\frac{dx\sqrt{\frac{2esm}{\mu vvnp}}}{\sqrt{\frac{2esm}{\mu vvnp} \times VV - xx}}$ est l'élément d'un arc de cercle, dont $\sqrt{\frac{2esm}{\mu vvnp} \times VV}$, seroit le rayon, & x

le sinus : cet élément étant divisé par V. D'où il suit que l'intégrale de cette différentielle, est égale à ce même arc divisé par V. Or, lorsque le corps a perdu entierement toute sa vîtesse initiale V ; on trouve, (n°. 191.) $\frac{\mu vvnp}{2es} \times xx = mVV$ ou $xx = \frac{2mes}{\mu vvnp} \times VV$, ou le sinus x de cet arc égal au rayon $\sqrt{\frac{2mes}{\mu vvnp} \times VV}$; & par conséquent cet arc égal au quart de cercle ; & par conséquent, enfin, l'intégrale de la différentielle précédente ou le tems T égal au quart de la circonférence d'un cercle dont le rayon seroit $= V \times \sqrt{\frac{2mes}{\mu vvnp}}$. ce quart étant divisé par V. D'où il suit que les grandeurs e, s, μ, v, n, p, étant supposées constantes, de même que le rapport d'un quart de cercle dont le rayon est multiple de V à son diviseur V ; le tems t, ou la durée de l'enfoncement, sera proportionnel à $\sqrt{m}$; c'est-à-dire, à la racine quarrée de la masse du corps P, quelle que soit d'ailleurs sa vîtesse.

195. La proposition du n°. 182.

peut encore servir à éclaircir quelques principes de la Théorie de la résistance des milieux au mouvement. Voyez *Nevvtoni Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Lib. II. Lemm.* 5. *&* 6. *& Scholion Lemm.* 7. *pag.* 315. Ces principes regardent la différente proportion ou estimation des résistances des fluides, suivant les différentes manieres dont les partiales de ces fluides retardent le mouvement de ces corps, & la nature même de ces fluides. On distingue donc deux sortes de résistances ; l'une qui vient de ce que la surface du corps qui se meut, choque & heurte, pour ainsi dire, les particules de ces fluides, & leur communique de son mouvement & de sa vîtesse ; & l'on a démontré que la grandeur de cette résistance qui vient de la densité du fluide, dépend aussi, ou varie, suivant la vîtesse & la configuration du corps mouvant. Mais la seconde espece de résistance vient uniquement de la cohésion, & de la ténacité des parties du fluide ; ou de la difficulté que le corps trouve à les séparer & elle est par là même entierement semblable, & suit les mêmes proportions que celle des corps mols dont on vient de par-

ler dans ce n°. 182. Aussi, M. *Nevvton* a prouvé : mais par une méthode différente, que cette résistance ne dépendoit nullement de la configuration des corps, ni de leur vîtesse ; mais seulement de la tenacité du fluide, & de la grandeur de la base de ces corps, comme de la base *A* B du corps *P*, (*fig.* 55.) & de la durée du tems. On peut voir ce qu'il en a dit dans la troisiéme édition de ses principes, suivant le rapport de M. *Daniel Bernoulli*, qui dans l'endroit cité ci-devant ; (n°. 187.) en parle de cette maniere. » Mais, il est difficile d'imaginer ou » de concevoir la cause & la maniere » d'une résistance qui soit proportion- » nelle à la vîtesse du corps. Aussi M. » *Nevvton* lui-même, avoue-t'il, que » cette hypothese est plutôt Mathé- » matique que naturelle, (dans la » derniere édition du même ouvrage » pag. 239.) & la mettant de côté, il » lui substituë, à la page 274. cette ré- » sistance, que nous avons dit être pro- » portionnelle à la durée des momens » de tems ; c'est-à-dire, être toujours » constante dans le même corps mû » dans le même fluide, sans avoir au- » cun égard à sa vîtesse.

196. Il reste enfin, à déterminer la grandeur des enfoncemens formés par le choc de deux corps mols, comme dans le cas des n°. 166. & suivans. Pour cet effet, on considérera, 1°. Que si V & Y, expriment les vîtesses initiales des corps choquans; m & μ leurs masses; & u & v leurs vîtesses perduës ou acquises par la résistance des parties de ces corps mols; & de même, f & φ leurs forces perduës ou acquises. 2°. Les forces finies perduës ou acquises, f ou φ, seront égales dans les deux corps, de même que les forces infiniment petites df & $d\varphi$, par les n°. 165. &c. Et par conséquent $mv = \mu v$, & $mdv = \mu dv$. 3°. Lorsque les corps vont de même côté avant le choc, les forces f ou df, & les vîtesses u & du détruites dans le plus vite, seront communiquées à celui qui va moins vîte; & lorsqu'ils vont à parties contraires, elles sont détruites dans l'un & dans l'autre, d'où l'on tire dans le premier cas leur vîtesse respective, $= V - u - Y - v$; & dans le second cas, $= V - u + Y - v$. 4°. La longueur des petits enfoncemens dx, produit à chaque instant dt, sera égale au produit de cette vîtesse respective, par l'instant

$dt, = \overline{V-u\mp Y-v} \times dt$; & par conséquent $dt = \frac{dx}{V-u\mp Y-v}$. 5°.

Ces valeurs de dt, df, & $d\varphi$, étant substituées dans l'équation des n°. 189. & 190. donneront $\frac{\mu vv}{2es}, \times nqq \times \frac{dx}{V-u\mp Y-v} = df = d\varphi = mdu = \mu dv$, ou $\frac{\mu vv}{es} \times nqq\, dx = 2mVdv - 2mudu \mp 2mYdu - 2mvdu =$ (à cause de $mu = \mu v$, ou de $mdu = \mu dv$,) $2mVdu - 2mudu \mp 2mYdu - \mu vdv$; & par conséquent, $\frac{\mu vv}{es} \times \int nqq\, dx = 2mVu - muu \mp 2mYu - \mu vv$. D'où il suit, (n°. 191.) que la grandeur de l'enfoncement sera proportionnelle à $2mVu - muu \mp 2mYu - \mu vv$; & si $m = \mu$, on aura $u = v$, & la grandeur de l'enfoncement sera proportionnelle à $2mVu - 2muu \mp 2mYu$.

197. De-là, il suit encore que si $V = 1$, $m = 2 = \mu$, $Y = 1$, & que les corps se meuvent directement l'un contre l'autre, on aura $u = 1$, & l'en-

foncement sera proportionnel à 4. 2°. Si $V = 3$, $Y = 1$, $m = 2 = \mu$, & que les corps se meuvent vers le même côté, on aura $u = 1$; l'enfoncement sera aussi proportionnel à 4. 3°. Si enfin, l'un des corps étoit absolument immobile, & la masse de l'autre $m = 4$, & sa vîtesse $V = 1$, on trouvera aussi par le n°. 190. l'enfoncement proportionnel à 4, ce qui s'accorde parfaitement avec la premiere expérience du Chap. 23. du Liv. I. de la Physique de M. *s'Gravesande.*

198. Soit enfin, $m > \mu$; sçavoir, $m = 3$, & $\mu = 2$, $V = 17$, $Y = 3$, & que les corps se meuvent l'un contre l'autre, on trouvera, 1°. par les regles ordinaires du choc des corps $u = 8$, & $v = 12$; & par conséquent, la grandeur de l'enfoncement proportionnelle à $2mVu - muu + mYu - \mu v v = 480$. Soit encore dans un autre cas $m = 4$, $V = 11 - \frac{1}{22}$, & que μ soit immobile, on trouvera $u = V = 11\frac{1}{22}$, $Y = v = 0$; & par le n°. 190. la grandeur de l'enfoncement proportionnelle à $m \times \overline{VV - \overline{V-u}^2}$

ou à 480, $+ \frac{1}{121}$; c'est-à-dire, à très-peu près égale à celle de l'enfoncement produit dans le cas précédent; ce qui s'accorde encore avec l'expérience 7, du même chapitre. On peut expliquer avec la même facilité, toutes les autres qui y sont rapportées; ainsi, je ne m'y arrêterai pas plus longtems.

199. On s'est encore servi, pour prouver le nouveau sentiment des forces vives de quelques argumens, tirés de la *composition* des mouvemens & du mouvement des *Eaux* : mais je renvoye entierement le Lecteur, sur cette premiere question, au Mémoire de *Mairan*, dans les *Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences*, *année* 1728. & sur le second, à ceux de Messieurs *Clarke & Eames*, dans les *Transactions Philosophiques*, & même à elui de M. *Daniel Bernoulli*, dans les *Mémoires de l'Académie de Petersbourg*, Tom. II. pag. 113. où il dit encore : » J'en viendrois déja à la question même, s'il ne m'étoit connu que le » seul nom des *forces vives*, excite » l'indignation de quelques person-

» nes ; je crois devoir avertir en leur
» faveur, que ce principe de la con-
» servation des forces vives, ne diffé-
» re point de celui qui a été employé
» premierement par M. *Huygens*, &
» reçu ensuite, sans difficulté de tous
» les Géomêtres ; sçavoir, que des
» corps poussés à descendre par la for-
» ce de la gravité, acquierent une vî-
» tesse, telle que s'ils remontoient
» chacun directement avec leur vîtesse
» finale, jusques à l'état de repos,
» leur centre commun de gravité re-
» tourneroit à sa premiere hauteur.
» Celui, à qui ce principe de Monsieur
» *Huygens* plaira davantage, pour-
» ra s'en servir pour traiter cette ques-
» tion avec la même facilité.

FIN.

AVERTISSEMENT.

ON a crû pouvoir joindre ici deux petits Traités ; l'un sur la *Force de la Poudre à Canon, expliquée par les seuls effets du ressort de l'Air*, comme étant une suite de la Section VI. & l'autre, contenant la démonstration de quelques regles sur la résistance des fluides, données par M. *Nevvton*, dans ses *Principes Mathém. &c.* ce qui joint à ce qu'on en a dit dans le *numéro* 195. servira à expliquer & à démontrer la Théorie, & les expériences du mouvement des corps dans les milieux résistans, rapportées dans ce même Ouvrage. Liv. II. Section VII. On trouvera ces démonstrations, à la fin de l'Essai sur le Mouvement de l'Air dans la propagation du Son.

SECTION DIXIE'ME.

Explication de la Force de la Poudre à Canon par les seuls effets du Ressort de l'Air.

ON peut, en se servant de l'une des deux Méthodes, expliquées dans la Section VI. n°. 147. & 148. déterminer la vîtesse réelle qu'une suite de ressorts dont la roideur & l'ouverture naturelle seront connuës, communiquera à un corps quelconque, posé horisontalement en repos au-devant d'elle. Quoique cette recherche ne soit pas l'objet principal de la Théorie précédente, je m'y arrêterai cependant quelque tems, à cause de l'usage qu'elle peut avoir en Physique, comme il paroîtra par l'application que j'en ferai ensuite au calcul de la force de la Poudre à Canon : Mais auparavant, je rappellerai ici en peu de mots quelques principes, afin que l'on ne soit pas obligé de lire toute la Dissertation précédente, pour entendre ce petit Traité.

I. *Principes que l'on suppose déja connus.*

200. Les espaces finis x, ou infiniment petits dx, parcourus par différens corps, pendant des tems finis t ou infiniment petits dt, avec des vîtesses uniformes u, sont égaux aux produits de ces vîtesses multipliées par les tems. Ainsi, $x = ut$, & $dx = udt$; & par conséquent, $dt = \frac{dx}{u}$, & $u = \frac{dx}{dt}$.

201. Si les vîtesses v, de ces corps sont variables ou changeantes, étant d'abord nulles au commencement des tems t & augmentant ensuite uniformément pendant la durée de ces tems, jusques à devenir égales aux vîtesses uniformes u du n°. précédent, les espaces s, parcourus par ces mêmes corps pendant les mêmes tems t, avec de telles vîtesses v uniformément accélérées, seront deux fois moindres que les espaces x, parcourus avec les vîtesses uniformes u. Ainsi s sera $= \frac{1}{2}$, x ou $2s = x = ut = vt$, & $t = \frac{2s}{v}$.

202. Les mêmes espaces seront encore proportionnels aux quarrés des vîtesses finales v ou u, ou des tems t, pourvû que l'accélération soit uniforme & égale pour ces différens corps, (comme il arrive à tous les corps tombans ou descendans par la force de la gravité,) Ainsi s sera toujours proportionnel à vv ou à tt, & la fraction $\frac{vv}{s}$, laquelle exprime leur rapport, sera une quantité constante.

203. Les vîtesses v étant uniformément accélérées, seront encore proportionnelles aux tems t, pendant lesquels durent leurs accélérations. D'où il suit, que si dv exprime le dégré infiniment petit de vîtesse, qui s'acquiert par l'accélération pendant chaque instant dt, on aura cette proportion $dv.dt :: v.t$; & par conséquent, $\frac{dv}{dt} = \frac{v}{t}$ & puisque, (n°. 2.) $t = \frac{2s}{v}$; on aura enfin $\frac{dv}{dt} = \frac{vv}{2s} =$ (par le n°. précédent,) à une grandeur constante.

204. Si un corps se meut avec une vîtesse finie v, continuellement variée,

soit en augmentant ou en diminuant ; cette vîtesse v pourra être considérée comme uniforme pendant la durée de chaque instant dt, que ce corps employe à parcourir des espaces infiniment petits dx ; & par conséquent, ces instans dt seront $= \frac{dx}{v}$, suivant la regle du n°. 201.

205. La gravité ou pésanteur communique à tous les corps, quels qu'ils soient, des dégrés de vîtesse infiniment petits & égaux dv, dans des instans, ou tems infiniment petits & égaux dt, & de même, des dégrés de vîtesse finis & égaux v, pendant des tems finis & égaux t, suivant les loix du mouvement uniformément accéléré, rapportées dans les n°. précédens, ensorte qu'elle agit sur tous ces corps par une action continuë & uniforme, & qu'elle leur communique dans les mêmes tems égaux finis t, ou infiniment petits dt, des quantités de mouvement, & des forces finies f, ou infiniment petites df, égales aux produits de leurs masses m par leurs vîtesses finies v, ou infiniment petites dv. Ainsi $f = mv$, & $df = mdv$.

206. Il suit de-là, & du n°. 203. que ces mêmes forces f ou df, sont proportionnelles aux produits des masses m, de ces corps par les tems t, ou dt; c'est-à-dire, aux quantités mt ou mdt; & par conséquent, si ces masses m sont toutes égales entr'elles, ces mêmes forces f ou df seront proportionnelles à la durée des tems t ou dt, pendant lesquels la gravité agit sur ces corps.

II. *Du mouvement produit dans des corps en repos ; le débandement des suites de ressorts, dont les roideurs sont réciproquement proportionnelles à leurs ouvertures ou longueurs.*

207. Soit s, (*fig.* 57.) une suite de ressorts égaux, laquelle étant posée sur un plan ab, & entierement débandée, ait sa plus grande ouverture ou longueur égale à la ligne lm, (*fig.* 57. & 58.) laquelle je nomme l. Si cette même suite S est comprimée ou bandée par la pression d'un corps pésant P, son ouverture $l\ m$ (l) diminuera & se réduira à une plus petite $m\ n$, suivant la grosseur du poids P. Que la masse de ce corps soit supposée $= m$,

& cette plus petite ouverture $mn = a$. Cette ouverture mn (a) restera toujours la même, pendant tout le tems de la pression du corps P, (pourvû que la roideur ou force des ressorts de la suite S ne s'affoiblissent point).

208. Il s'ensuit delà, que la résistance de cette suite de ressorts, contre la pression du corps P, est précisément égale & de même nature que cette pression, ou que l'action de la gravité sur ce corps; & par conséquent, que cette résistance detruit, (dans ce corps P,) à chaque instant égal dt, des forces infiniment petites df, toutes égales entr'elles, & à celles que la gravité lui communique, de même à chaque instant. La résistance instantanée de cette suite de ressorts ainsi comprimée jusques à sa plus petite ouverture mn (a) pourra donc être comprimée par la quantité $df = mdv$; & par conquent, si l'on nomme r, la roideur des ressorts ainsi bandés, (dont cette suite est composée,) on aura $rdt = mdv$, & $r = \frac{mdv}{dt}, = (\text{n. } 203) \frac{mvv}{2}$.

209. On multiplie dans cette premiere égalité, la roideur r, par l'ins-

tant dt, (quoique cet instant soit supposé constant,) parce que les effets de cette résistance , ou les petites forces df produites , ou détruites par elle, sont, (toutes choses d'ailleurs égales,) proportionnelles à la durée des tems infiniment petits dt, pendant lesquels cette résistance dure , ou continuë à exercer son action.

210. Soit maintenant la même suite de ressorts S, (*fig.* 59.) posée horisontalement, & comprimée ou bandée de la même quantité $m\,n$ (*a*), & appuyée contre un plan vertical $a\,b$, & prête à se débander & à pousser en avant un corps C placé en repos directement au-devant d'elle, & lequel peut se mouvoir horisontalement dans le même sens que la suite S peut se débander. On propose de trouver la vîtesse ou le mouvement que cette suite S, produira en se débandant dans le corps C, & cela en supposant que la roideur instantanée r, de cette suite, ne soit point constante ou uniforme; mais qu'elle varie en proportion réciproque des différentes ouvertures x de cette suite.

211. On nommera, 1°. M, la mas-

se du corps *C.* 2°. *V* les différentes vitesses de ce corps, dans différens instans, acquises par l'application continue de la résistance ou de la roideur de la suite *S* sur ce corps *C.* 3°. *x* les différentes ouvertures de cette suite dans ces mêmes instans. 4°. *F* les forces résidentes dans le corps $C = MV$. On aura, 5°. $dF = MdV$, & 6°. $dx =$ (n°. 200. & 204.) Vdt, & $dt = \frac{dx}{V}$.

212. Dans le premier instant que cette suite commence à se débander, x se trouve $= a$, & sa plus grande roideur $r =$ (n°. 208.) $\frac{mvv}{2s}$. D'où il suit, (n°. 11.) que si l'on fait cette analogie $x . a :: \frac{mvv}{2s} . \frac{mavv}{2sx}$; on aura les autres roideurs variables r, de cette suite dans ses différentes ouvertures $x = \frac{mavv}{2sx}$.

213. Ces roideurs variables $r = \frac{mavv}{2sx}$, étant multipliées (par la raison du n°. 209.) par les instans $dt = \frac{dx}{V}$, on aura les résistances variables &

instantanées de cette suite, $= \frac{mvvadx}{2sxV}$ $=$ aux forces infiniment petites dF, produites pendant ces instans, dans le corps $C = MdV$, d'où l'on tire $\frac{m}{M} \times \frac{adx}{x} = \frac{2sVdV}{vv}$.

214. Or, il faut remarquer ici, suivant ce qui a été dit dans le n°. 201. que la fraction $\frac{2s}{vv}$, est une quantité constante, dans laquelle v exprime la vîtesse finie que le corps C auroit reçûe de la gravité, s'il étoit tombé librement d'une certaine hauteur finie $=$ S. D'où il suit, (en intégrant cette équation differentielle par les logarithmes dont la marque soit L,) que $\frac{m}{M} \times a\,(L)\,x = \frac{SVV}{vv}$.

215. Si l'on nomme H la hauteur dont le corps C devroit tomber librement pour recevoir de la gravité une vîtesse $= V$. on aura par le n°. 202. $H.\ s :: VV.\ vv$; & par conséquent, $H = \frac{sVV}{vv} = \frac{m}{M} \times a\,(L)\,x$.

216. On aura aussi $rr = \frac{mvv \times a(L)x}{MS}$

&

& par conséquent, $V = \sqrt{\frac{mvv}{MS}} \times \sqrt{a(L)x}$.

217. Par rapport au tems, ou à la durée du débandement, lequel je nomme T, on pourroit le trouver éxactement, si l'on pouvoit avoir l'intégrale de son élément $dt =$ (n°. 211 & 216.) $\frac{dx}{V} = \sqrt{\frac{dx}{(L)x}} \times \sqrt{\frac{MS}{mvva}}$: Mais comme cette différentielle ne paroît pas pouvoir être intégrée, on peut se contenter de supposer ce tems T à peu près égal à celui qu'un corps employeroit à parcourir la longueur x d'un mouvement uniformément accéléré, à la fin duquel il auroit acquis la vîtesse V. Or ce tems est (n°. 201.) $= \frac{2x}{V}$, & le tems t, que le corps C employeroit à tomber librement de la hauteur $H = \frac{2H}{V}$. Ainsi l'on aura cette proportion, $T . t :: \frac{2x}{V} . \frac{2H}{V} :: x . H$; & par conséquent $T = \frac{tx}{H}$.

218. On peut remarquer que le

tems T déterminé par cette supposition, sera toujours plus long que le véritable, parce que le mouvement du corps C est plus accéléré au commencement du débandement de la suite S, que sur la fin. On donnera dans la suite la valeur éxacte de ce tems T, pour quelques cas particuliers, en déterminant par approximation l'intégrale, $\int \sqrt{\frac{dx}{a(L)x}}$ de la differentielle $\sqrt{\frac{dx}{a(L)x}}$.

219. Lorsque cette suite sera entierement débandée, on aura $x = l$, & par conséquent $H = $ (n°. 215.) $\frac{m}{M} \times a\,(L)\,l$, & $T = \frac{tl}{H}$, ou $= \sqrt{\frac{Ms}{mvv}} \times \int \sqrt{\frac{dx}{a(L)x}}$.

220. On sçait par les regles du calcul intégral, que la quantité $a\,(L)\,l$ est égale au produit du logarithme hyperbolique du rapport de l à a, ou de la fraction $\frac{l}{a}$, multiplié par la mesure commune de ces deux grandeurs, égales par éxemple, (en supposant a de 2 pouces, & l de 200 pouces,) au

produit du logarithmique hyperbolique de 100. multiplié par la longueur de 2 pouces, ce qui donneroit, en ce cas, cette quantité a (L) l, égale à $\frac{1}{95}$ éme pouces, à fort peu près.

221. Il suit de là, que si l'on compare les vîtesses communiquées à un même corps C par le débandement de différentes suites de ressorts, d'une roideur égale, mais inégales en longueurs, on trouvera, 1°. les masses m des poids P, qui les tiennent bandées, comme dans la *fig.* 57, en les réduisant à de plus petites ouvertures a, proportionnelles à leurs plus grandes ouvertures l, les mêmes ou égales pour toutes ces suites, de même que les fractions $\frac{l}{a}$, & par conséquent, les logarithmes hyperboliques de ces fractions aussi égaux. Mais, 2°. les communes mesures de ces grandeurs a & l, varieront en même proportion que ces grandeurs elles-mêmes, ou que les longeurs l, & par conséquent, enfin, les hauteurs H, ou les quarrés des vitesses V du corps C, varieront aussi en même proportion que les lon-

gueurs *l* de ces suites.

222. Si les longueurs de ces suites sont égales, & que leurs roideurs soient différentes, on trouvera encore les fractions $\frac{l}{a}$, & les communes mesures des grandeurs *a* & *l*, les mêmes pour toutes ces suites ; mais les masses *m* des poids *P*, seront proportionnelles à ces roideurs. D'où il suit encore que les hauteurs *H*, ou les quarrés des vîtesses du même corps C seront dans ce cas, proportionnelles aux roideurs de ces suites.

223. Si toutes choses étant d'ailleurs égales, les masses *M* de plusieurs corps *C*, poussés par différentes suites, sont inégales, les quarrés des vîtesses *V* de ces corps, seront réciproquement proportionnelles à leurs masses *M*.

224. Il s'ensuit enfin, des trois n°. précédens, que les quarrés *V V* de ces vîtesses, seront proportionnels aux quantités $\frac{lr}{M}$. (n°. 151.)

225. Si l'on veut réduire le tems *T* (trouvé n°. 219.) à des mesures connuës, comme par exemple à des

secondes, lorsque la hauteur *H* est aussi déterminée en mesures connuës, comme en pieds ou en pouces; il n'y a qu'à faire cette proportion.

Comme l'espace parcouru dans une seconde, par un corps qui tombe librement, lequel espace est = $15.^{\text{pieds}}$ à peu près.

Au quarré d'une seconde,

De même la hauteur *H*

Au quarré du tems *t*, lequel sera donc $tt = \frac{\times l \times l H}{15 \text{ pieds}} = \frac{H}{15 \text{ pieds}}$; & par conséquent, $TT = \frac{ttll}{HH} = \frac{ll}{H \times 15 \text{ pieds}}$

226. En faisant de même cette autre proportion. Comme la hauteur de $15.^{\text{pieds}}$ parcouruë par un corps tombant dans le tems d'une seconde.

Au quarré de sa vîtesse acquise par sa chûte, laquelle vîtesse est de 30 pieds par secondes.

De même la hauteur *H*.

Au quarré de la vîtesse *V*. Ainsi l'on aura $VV = \frac{H \times \overline{30 \text{ pieds}}^2}{15 \text{ pieds}} = H \times 60^{\text{pieds}}$.

Rem. 227. Pour faire voir l'accord de cette Méthode, fondée sur les prin-

cipes des no. 86. & 89. avec celle de M. *Camus*, exposée dans les n°. 130. 144. & suivans, soit, (*fig.* 60.) la courbe *NM*, équivalente à la suite de ressorts *S*, du n°. 8. & 11. & sa tangente verticale *NL*, (n°. 173.) sur laquelle prolongée en haut, on ait pris une portion *NQ* égale à la plus petite compression ou ouverture *a* de la suite *S*, en sorte que la somme de cette portion *NQ*, & d'un arc quelconque *NO*, étant appellée *S*, soit égale à une *compression correspondante* *x*, de la suite *S*; il s'ensuit des n°. 125. & 210. que les dégrés infiniment petits de vîtesse *du*, que la pésanteur communiquera au corps *P*, placé dans différens points *O*, doivent être au premier dégré de vîtesse en *N*, en raison réciproque de la somme *S* de l'arc *NO*, & de la droite *NQ*, à cette même droite *NQ* *a*.

228. Si l'on prend sur la courbe *NM* un second point *o*, infiniment proche de *O*, ensorte que $Oo = ds$, soit égal au *dx* correspondant de la suite *S*, & que de ces deux points *O* & *o*, on tire sur l'horisontale *Nn*, les abscisses verticales & infiniment pro-

ches $O\,P$, op; ces abscisses seront, (*Phil. Newt. Instit.* n°. 203.) égales aux hauteurs desquelles le corps P, auroit dû tomber pour acquérir la même vîtesse u, avec laquelle il se meut le long du petit arc Oo; mais ces hauteurs sont égales aux hauteurs H du n°. 215. puisque la vîtesse u du corps P, dans le point O, est la même que sa vîtesse u, dans un point correspondant des compressions de la suite S. Ainsi l'on aura OP, ou $op = H$, & $mo = dH$.

229. On peut considérer le petit arc Oo, comme un plan incliné sur lequel le corps P se meut avec la vîtesse variable u pendant l'instant constant $d\,t$; & l'on trouvera par les regles du mouvement des corps sur les plans inclinés, (*Phil. Nevvt. Instit.*) que la petite force $d\,f$ ou la petite vîtesse du, communiquée par la gravité dans le point O, est à la premiere petite force $d\,f$, ou vîtesse $d\,u$ semblable communiquée en N, comme la hauteur $m\,o$ (dH) de ce petit plan Oo, est à sa longueur $O\,o$, $(d\,S)$.

230. On aura donc par les n°. 227. & 229. $dH, dS :: a, S$; & par consé-

quent $adS = SdH$, ou $dH = \frac{adS}{S} =$ (puisque S & dS sont toujours égaux à x & dx ;) $\frac{adx}{x}$; & par conséquent, enfin, $H = a$ (L) x ce qui est une équation semblable à celle du n°. 215.

Application des Principes précédens au calcul de la Force de la Poudre.

231. Pour appliquer à présent la Théorie précédente, à l'explication des effets & de la force de la Poudre, je proposerai, premierement, quelques conjectures sur sa nature, ou sa conformation, & sur la cause immédiate de ses effets, en supposant, 1°. (selon l'hypothese de M. *de la Hire*, rapportée dans *l'Hist de l'Acad. Royale des Sciences*, de l'année 1702.) Que cette poudre renferme une certaine quantité d'air, beaucoup plus condensé que l'air ordinaire, & que cet air est retenu dans cet état de compression, par l'arrangement & la disposition des plus petites particules de cette poudre, à peu près comme l'on re-

tient dans differentes machines, plusieurs ressorts bandés, par le moyen de quelques crochets ou arrêts fort petits, & cependant, très-suffisans pour les retenir dans cet état de bandement, quoique le moindre dérangement d'entr'eux suffise pour débander & remettre en liberté très-promptement tous ces ressorts ensemble.

232. 2°. Que l'action du feu sur la poudre même, l'action de la plus petite étincelle peut, en agitant subitement & violemment les particules de cette poudre, produire sur elles un effet semblable à celui dont on vient de parler, (n°. précédent,) en mettant en liberté quelques parties de cet air condensé, lesquelles pourront ensuite déranger toute la disposition des parties voisines, & remettre en liberté d'autres parties d'air.

233. On peut aussi concevoir que l'inflammation de la poudre se communique très-promptement dans toutes ses parties, comme on le voit arriver dans quelques corps combustibles, qui n'ont cependant aucune force capable d'ébranler & de mouvoir les corps pésans qu'on exposeroit à

leur action. D'où l'on peut conclure, que l'inflammation de cette poudre n'est point la cause propre & immédiate de ses effets surprenans, mais seulement une cause éloignée, qui en brisant ou dérangeant la contexture de ses particules, met en liberté l'air qu'elles contenoient comprimé, lequel enfin, en se débandant & se raréfiant, produit immédiatement, & par lui-même tous ces effets. Il se peut faire encore que la chaleur, causée par l'inflammation, augmente la force élastique de l'air, ce que l'on a remarqué arriver dans plusieurs expériences.

234. M. *Bernoulli*, souhaitant sans doute de s'assurer de la vrai-semblance des hypotheses précédentes, & de connoître par expérience, si effectivement il y avoit une certaine quantité d'air dans la poudre, jusques à quel point il y étoit condensé, & s'il y conservoit toute sa force élastique, fit là-dessus quelques expériences rapportées dans le premier volume de *l'Hist. de l'Acad. Royale des Sciences, depuis 1666. jusques en* 1699. par lesquelles il trouva, que non seulement cette poudre contenoit une grande quantité

d'air, mais que cet air y étoit pour le moins 100. fois plus condensé que l'air ordinaire, (& cela même en supposant que la poudre en fût entierement composée;) & par conséquent, sa force élastique beaucoup plus grande dans la même proportion que celle de l'air naturel. On peut lire là-dessus, l'explication plus détaillée qu'en donne M. de *Fontenelle*, dans le Livre dont je viens de parler.

235. Retenant donc les suppositions précédentes, lesquelles paroissent très-vrai-semblables, il semble qu'on peut considérer une certaine quantité de poudre, celle, par exemple, dont on chargeroit un mousquet ou un canon, comme une masse entiere de pur air, 100. fois plus condensé que l'air ordinaire; & par conséquent, (par les propriétés connuës du ressort de l'air) comme une suite de ressorts égaux tous bandés ou comprimés, & prêts à se débander dès que l'action de quelque partie de feu, ou l'inflammation de cette poudre auroit dérangé ou dégagé les petits arrêts, ou les petits liens qui retiennent tous ces ressorts dans cet état de bandement.

236. Soit donc *AB*, (*fig.* 61.) le canon d'un mousquet, chargé de poudre depuis son fonds *a*, jusques à une certaine distance *b*, & d'une bale de plomb ou de fer *P*, au-devant de la poudre *a b*. On propose de trouver la vîtesse que l'air contenu dans cette poudre, communiquera en se dilatant (dans le tems de l'inflammation,) à la balle *P*, en supposant, 1°. que les forces élastiques de l'air, sont réciproquement proportionnelles à ses différentes compressions ; & par conséquent, 2°. que la quantité d'air contenue dans la poudre, agit sur la balle *P*, précisément de la même maniere qu'une suite de ressorts, telle que celle du n°. 210. & dont la plus grande roideur seroit égale à la force élastique de l'air condensé dans la poudre, & l'ouverture naturelle ou la longueur égale aussi à celle du volume, que cet air, dilaté au même point que l'air ordinaire, occuperoit dans une étenduë cylindrique d'un diamêtre égal à celui du mousquet ; & enfin, 3°. en faisant abstraction de la résistance de l'air ordinaire au mouvement de la balle, & à la dilatation de l'air comprimé dans la poudre.

237. On aura donc le rapport de la plus petite ouverture *a* de cette suite, ou du plus petit volume de l'air comprimé à son volume ordinaire, ou à l'ouverture naturelle (*l*) de la suite, égal au rapport de 1. à 100 ; & par conséquent, $\frac{l}{a} = 100$. dont le logarithme hyperbolique est $= \frac{460517}{100000}$ ou 4, 60517. 2°. le poids *m*, que cette suite de ressorts, ou que la quantité d'air comprimé dans la poudre, pourroit soutenir verticalement, est égal à 100. fois le poids d'une colomne cylindrique de mercure de 28 pouces de haut, & d'un diamêtre égal à celui du mousquet, ou au poids d'une colomne semblable de 2800 pouces de haut. 3°. Ce poids *m*, est au poids *M* de la balle *P*, (dont le diamêtre est supposé égal au calibre du mousquet,) en raison composée, 1) du poids d'un cylindre de 2800. pouces de haut, à un cylindre de même base, & d'une hauteur égale au diamêtre de la balle, ou au calibre du mousquet, 2) du poids de ce dernier cylindre, au poids d'une Sphere de même diamêtre, ou égale à

la balle *P*, & 3.) enfin, de la pésanteur spécifique du mercure à celle du plomb ou du fer. Le premier de ces rapports sera, (en nommant *D* le diamètre de la balle, ou le calibre du mousquet, $= \frac{2800 \text{ pouces}}{D}$. Le second $=$) ^{3}, & le dernier $= \frac{6}{5}$, ou $\frac{7}{4}$. En joignant ou multipliant ensemble tous ces rapports, on aura enfin, $\frac{m}{M} = \frac{2800^{\text{pouces}}}{D} \times \frac{3}{2} \times \frac{6}{5}$ ou $\frac{7}{4} = \frac{5040^{\text{pouces}}}{D}$ ou $= \frac{7350^{\text{pouces.}}}{D}$

238. On aura, (4°. en nommant *A* la longueur *ab* de la charge de la poudre,) $H = \frac{m}{M} \times A \times 4,60517, = 4,60517 \times \frac{A}{D} \times 5040^{\text{pouces}}$, ou $4,60517 \times \frac{A}{D} \times 7350^{\text{pouces}} = \frac{A}{D} \times 1934^{\text{pieds}}$ ou $\frac{A}{D} \times 2820^{\text{pieds.}}$

239. On aura donc enfin, $VV =$ (n°. 226.) $H \times 60^{\text{pieds}} = \frac{A}{D} \times 116040^{\text{pieds}}$, ou $\frac{A}{D} \times 169200^{\text{pieds.}}$ &c

$TT = (\text{n}^o. 225.)\ \frac{ll}{H \times 15 \text{ pieds}} = ll \times \frac{D}{A} \times \frac{1}{29010 \text{ pieds}}$ ou $ll \times \frac{D}{A} \times \frac{1}{42300 \text{ pieds}}$. Or, (n°. 237. & 238.) $l = 100 \times a = 100 \times A$; & par conséquent, $ll \times \frac{D}{A}$ 10000 $\times AD$; & par conséquent, enfin, $TT = \frac{10000 \times AD}{29010 \text{ pieds}}$ ou $\frac{10000 \times AD}{42300 \text{ pieds}}$.

240. On démontrera dans la suite, (n°. 257.) que la valeur de TT, trouvée dans le n°. précédent ensuite de la supposition du n°. 217. doit être multipliée par la fraction $\frac{34489}{100000}$ ou par la quantité 0, 34489, pour avoir la valeur de TT, très-approchante de la véritable, à moins de $\frac{1}{100000}$ près. Ainsi l'on aura cette valeur $TT = \frac{34489 \times AD}{290100 \text{ pieds}}$ ou $= \frac{34489 \times AD}{423000 \text{ pieds}}$.

241. Supposez à présent, que le calibre du mousquet soit d'un demi pouce, tel à peu près que celui des mousquets qui portent la balle de

plomb d'une once, & que la longueur *ab*, de la charge de la poudre soit d'un pouce, on aura $A = \frac{1}{12}$ pieds & $D = \frac{1}{24}$ pieds, $\frac{A}{D} = 2$, & $AD = \frac{1}{288}$. D'où l'on tire dans ce premier cas (où la balle *P* est de plomb,) 1°. $VV = 2 \times 116040^{\text{pied.}} = 232080^{\text{pieds.}}$; & par conséquent, $V =$, ou la vîtesse de la balle $= \sqrt{232080^{\text{pieds.}}} = 482^{\text{pieds.}}$ par secondes. On aura aussi $TT = \frac{1}{288} \times \frac{34489 \times AD}{290100 \text{ pieds}} = \frac{34489}{83548800}$, & *T* ou la durée de l'action de la poudre sur la balle $= \frac{1}{49\frac{1}{14}}$ de seconde.

242. Si l'instrument *A B* est un Canon dont le calibre *D* soit de 3 ou 4 pouces, & que la longueur de la charge *ab* (*A*) de la charge soit quadruple de la largeur du calibre, on trouvera dans ce second cas, (ou le boulet de fer,) $\frac{A}{D} = 4$, & $AD = \frac{1}{4}$ de pied; & par conséquent, $VV = 4 \times 169200^{\text{pieds.}}, = 676800^{\text{pieds.}}$, &

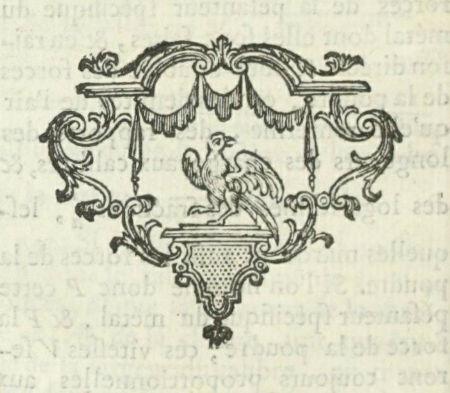
$$TT = \frac{1}{4} \times \frac{34489 \times AD}{423000} = \frac{34489 \times AD}{1692000}$$

d'où l'on déduit enfin la vîtesse du boulet, ou $V = 823^{\text{pieds.}}$, & la durée du coup, ou le tems $T = \frac{1}{7}$ de seconde.

243. On peut enfin conclure des n°. 224. & 239. que les vîtesses de différentes balles ou boulets, sont en raison réciproque, & sous-doublée des forces de la pésanteur spécifique du métal dont elles sont faites, & en raison directe & sous-doublée des forces de la poudre, ou des densités de l'air qu'elle renferme, des rapports des longueurs des charges aux calibres, & des logarithmes des fractions $\frac{l}{a}$, lesquelles marquent aussi les forces de la poudre. Si l'on nomme donc P cette pésanteur spécifique du métal, & F la force de la poudre, ces vîtesses V seront toujours proportionnelles aux quantités $\sqrt{\frac{F \times A}{P \times D} \times (L) \frac{l}{a}}$.

244. C'est sur cette regle qui suppose les diamêtres des balles, &c. égaux aux calibres, & sur les déterminations précédentes, que j'ai calculé

les différentes vîtesses de ces balles ou boulets, déterminées par le nombre de pieds, que ces corps sortans des mousquets ou des canons parcourent dans la durée d'une seconde de tems, comme on peut le voir dans cette Table, où l'on n'a eu aucun égard à la résistance de l'air extérieur.



I. Table des vîtesses des Balles, ou des Boulets.

Forces de la Poudre ou Rapports de la Densité de l'Air qui y est renfermé, à celle de l'Air naturel.

Longueurs des Charges à l'égard des Calibres.	100	150	200	250	
1	341	454	554	646	Balles, ou Boulets de plomb.
2	482	642	783	914	
3	590	787	960	1119	
4	681	908	1109	1293	
5	762	1015	1239	1444	
6	834	1112	1358	1582	
1	411	548	669	781	Balles, ou Boulets de fer.
2	582	776	946	1103	
3	713	950	1159	1351	
4	823	1097	1138	1561	
5	920	1226	1496	1744	
6	1007	1343	1639	1910	

245. Comme la durée de chaque coup ou le tems *T* dépend de la longueur réelle de la charge, déterminée en pouces, ou en parties de pied, & non point simplement de son rapport avec le calibre, il seroit trop long d'en composer une Table : mais on peut le trouver très-facilement de cette maniere. 1°. En multiplant la longueur de la charge *A* ou *a*, par la force de la poudre *F*, pour avoir la longueur $l = F \times A$. 2°. En divisant le double de cette longueur par la vîtesse *V*, pour avoir la quantité $\frac{2F \times A}{V}$. Cette regle est évidente par les n°. 201. & 217. ou l'on a supposé ce tems $T = \frac{2l}{V}$. Mais si l'on veut le connoître plus exactement à une $\frac{1}{100000}$ éme près; Voyez le n°. 256. Il faudra, 3°. multiplier cette quantité $\frac{2F \times A}{V}$ par les fractions, $\frac{58724}{100000}$, $\frac{57822}{100000}$, $\frac{57267}{100000}$, $\frac{56891}{100000}$, suivant les différentes forces de la poudre ou les différentes valeurs de *F*, = 100, 150, 200, 250; ce qui don-

nera les valeurs de T, comme il suit.

Force de la Poudre.

100.	150.	200.	250.

Valeurs des Tems T.

$\frac{117448 \times A}{1000 \times V}$	$\frac{173466 \times A}{1000 \times V}$	$\frac{229068 \times A}{1000 \times V}$	$\frac{284455 \times A}{1000 \times V}$

Si, par exemple, la longueur de la charge est d'un pouce, & en même tems double du calibre, & que l'on suppose l'air contenu dans la poudre 200 fois plus condensé que l'air ordinaire, on aura $A = \frac{1}{12}$ pieds, & $F = 200$; & par la Table précédente $V = 783$ pieds pour une balle de plomb, d'où l'on tire $T \frac{229068 \times \frac{1}{12} \text{pieds.}}{1000 \times 787 \text{ pieds}} = \frac{1}{41}$ éme de seconde.

Remarques sur la Théorie précédente.

246. J'ai dit dans le n°. 217. que

la grandeur du tems T, ne pouvoit être déterminée exactement, à cause de l'impossibilité d'intégrer par aucune méthode directe & réguliere, sa différentielle $dT = \frac{dx}{V} = \sqrt{\frac{MS}{mvv}} \times \sqrt{\frac{dx}{a(L)x}}$. Mais cette intégration peut se trouver par la méthode approchée des séries infinies, dont je donnerai ici un exemple. Supposez donc, 1°. que le logarithme de x soit $= yy$ & que la soutangente a des logarithmes de cette équation, soit égale à l'unité $= 1$. on aura par la nature des logarithmes, ou de la courbe logarithmique $\frac{dx}{x} = 2ydy$ ou $dx = 2xydy$, & $\sqrt{\frac{dx}{(L)x}} = \frac{dx}{v} = 2xdy$.

247. L'on sçait encore par les propriétés de la même courbe, & des séries infinies que la grandeur x est égale à cette série infinie ; $1 + yy + \frac{y^4}{1.2} + \frac{y^6}{1.2.3} + \frac{y^8}{1.2.3.4.} + \frac{y^{10}}{1.2.3.4.5.} +$

$\frac{y^{12}}{1.2.3.4.5.6.}$ + &c. Ainsi substituant cette valeur de x dans l'équation précédente $\sqrt{\frac{dx}{(L)\,x}} = 2xdy, = 2dy + 2yydy + \frac{2y^4dy}{1.2.} + \frac{2y^6dy}{1.2.3.} + \frac{2y^8dy}{1.2.3.4} + \frac{2y^{10}dy}{1.2.3.4.5.} + \frac{2y^{12}dy}{1.2.3.4.5.6.}$ + &c. & $\int\sqrt{\frac{dx}{(L)\,x}} = 2y + \frac{2y^3}{3} + \frac{2y^5}{1.2.5.} + \frac{2y^7}{1.2.3.7.} + \frac{2y^9}{1.2.3.4.9} + \frac{2y^{11}}{1.2.3.4.5.11.} + \frac{2y^{13}}{1.2.3.4.5.7.13.}$ + &c.

248. Comme les grandeurs *M*, *m*, *v*, *S*, peuvent rester constantes, quelque changement qu'il arrive à *a* ou *A*, il est évident que le rapport de ces grandeurs *M*, *m*, *v*, *S*, variera en proportion réciproque de *A*; & par conséquent, que si l'on suppose *A* constante, ou = 1, quoiqu'elle varie réellement, il sera nécessaire, (pour conserver le même rapport qu'auparavant entre cette grandeur *A*, & les grandeurs *M*, *m*, *v*, *S*,) de faire varier ces dernieres grandeurs *M*, *m*, *v*, *S*, en raison réciproque de *A*, ce qui se

fait en divisant ces mêmes grandeurs par les différentes valeurs réelles de A; & en mettant dans les quantités $\sqrt{\frac{MS}{mvv}}$ pour M, S, v, v, les grandeurs $\frac{M}{A}$, $\frac{S}{A}$, $\frac{m}{A}$, $\frac{v}{A}$, ce qui changera cette quantité en $\sqrt{\frac{MSA}{mvv}}$.

249. On aura donc enfin, la valeur de $T = \int \sqrt{\frac{dx}{a\,(L]\,x}} \times \sqrt{\frac{MS}{mvv}} = \sqrt{\frac{MSA}{mvv}}$

$$\times\, 2y + \frac{2y^3}{3} + \frac{2y^5}{1.2.5.} + \frac{2y^7}{1.3.5.6.} + \frac{2y^9}{1.2.3.4.9.} + \frac{2y^{11}}{1.2.3.4.5.11.} + \frac{2y^{13}}{1.2.3.4.5.6.13.} + \&c.$$

250. Si l'on suppose, comme dans le no. 214. que l'espace S soit égal à celui que les corps tombans parcourent dans une seconde, (afin de pouvoir déterminer le tems T en secondes,) & v les vîtesses de ces corps, acquises à la fin de cette seconde, on aura, (no. 225.) S à très-peu près à 15 pieds. & $v = 30$ pieds.,

S

$\frac{s}{vv} = \frac{1}{60^{\text{pieds}}}$, & $\sqrt{\frac{MsA}{mvv}} = \sqrt{\frac{MA}{m\times 60^{\text{pieds}}}}$
$= \sqrt{\frac{MA}{m\times 15^{\text{pieds}}}} \times \frac{1}{2}$, & $T = \sqrt{\frac{MAs}{mvv}} \times$
$\int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}} = \sqrt{\frac{MA}{m\times 15^{\text{pieds}}}} \times \frac{1}{2}\, 2y +$
$\frac{2y^3}{3} + \frac{2y^5}{1.2.5} +$ &c. $\sqrt{\frac{MA}{m\times 15^{\text{pieds}}}} \times$
$\frac{\int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}}}{2}$

251. Si l'on ſuppoſe que y ſoit $= \frac{1}{10}$, on trouvera, 1°. $\int \frac{dx}{\sqrt{a(L)x}} = \frac{2}{10} + \frac{2}{3000} + \frac{2}{100000} +$ &c. $= \frac{20067}{100000} +$ &c. 2°. x (n°. 247.) $= 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{20000} +$ &c. $= \frac{101005}{100000} = \frac{101}{100} +$ &c.

252. On aura donc $\frac{x \text{ ou } l}{a} = \frac{101}{100}$ ou le rapport de la condenſation de l'air dans la poudre à ſa denſité ordinaire,

(suivant cette supposition,) $= \frac{101}{100}$ d'où l'on calculera par une méthode semblable à celle du n°. 237. la quantité $\frac{m}{M} \times \frac{28^{\text{pouces}}}{D} \times \frac{101}{100} \times \frac{3}{2} \times \frac{6}{5} =$ (pour des balles de plomb) $\frac{25452}{500D}^{\text{pouces}}$; & par conséquent, $\frac{MA}{m} = \frac{500AD}{25452^{\text{pouces}}}$.

253. Si l'on suppose enfin, que la longueur a ou A de la charge, soit double du calibre D, & égale à un pouce, on aura $A = 1^{\text{pouce}} \times \frac{1}{2}^{\text{pouce}} = \frac{1}{2}^{\text{pouce}}$, & en introduisant toutes ces valeurs connuës de $\frac{MA}{m}$ de $\frac{s}{vv}$; & $\int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}}$ dans l'équation $T = \sqrt{\frac{MAs}{mvv}} \times \int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}}$

On trouvera $T = \frac{5}{6} \times \sqrt{\frac{1}{50904} \times \frac{20067}{100000}} =$ (toutes réductions faites) $\frac{20607}{27073000} = \frac{1}{1353\frac{1}{2}}$ de seconde.

254. On trouvera aussi dans ce cas, $H = \frac{m}{M} \times a \times (L) = l\, \frac{50904}{500} \times 1^{\text{pouce}}$

$\times \frac{1}{100} = \frac{50904}{50000} = 1 \frac{9}{500}$ pouce : d'où l'on tirera $V =$ (numero 226.) $\sqrt{H \times 720^{\text{pouces}}} = 27 \frac{1}{14}$ pouces. Or l'espace parcouru par la balle, pendant la dilatation de l'air, est $= l - a$, lequel espace peut être supposé sans erreur sensible $= l$, lorsque l est beaucoup plus grand que a, comme dans tous les cas de la Table du n°. 244. Mais dans ce cas où l est presque $= a$, il est absolument nécessaire d'avoir égard à cette grandeur a, on aura donc cet espace $= \frac{101}{100}$ pouce $-$ 1 pouce $= \frac{1}{100}$ pouce, & en cherchant la valeur de T suivant la regle des n°s. 201. & 217. & 245. on trouvera $T = \frac{2l - 2a}{V}$ $= \frac{2}{100} \times \frac{1}{27\frac{1}{14}} = \frac{2}{2707} = \frac{1}{1353\frac{1}{2}}$.

255. Cette valeur est précisément la même que celle du n°. 253. ce qui fait voir que la méthode des n°s. 201. & 217. est suffisamment exacte, lorsque l est presque $= a$: mais elle peut s'écarter assez loin de la vérité, lorsque l est plus grand que a, comme on le

verra par le calcul suivant. On a trouvé par cette méthode, (nos. 201 & 225.) $T = \frac{l}{\sqrt{H \times 15^{\text{pieds}}}}$ = (en nommant toujours F la force de la poudre,) $\frac{FA}{\sqrt{H \times 15^{\text{pieds}}}}$ = (en mettant pour H sa valeur $\frac{m}{M} \times A\,(L)\,x$; no. 215.) $\frac{FA}{\sqrt{\frac{m}{M} \times A \times (L)\,x \times 15^{\text{pieds}}}}$ $\sqrt{\frac{MA}{m \times 15^{\text{pieds}}}} \times \sqrt{\frac{F}{(L)\,x}}$, & l'on vient de voir, (no. 250.) que sa valeur éxacte est $T = \sqrt{\frac{MA}{m \times 15^{\text{pieds}}}} \times \frac{\int \frac{dx}{\sqrt{(L)\,x}}}{2}$.

Or, ces deux valeurs sont entr'elles; comme $\frac{2F}{\sqrt{(L)\,x}}$ est à $\int \frac{dx}{\sqrt{(L)\,x}}$. De sorte, que si l'on multiplie la premiere valeur $\frac{l}{\sqrt{H \times 15^{\text{pieds}}}}$ ou, (no. 245.)

$\frac{2l}{V}$ par la quantité $\frac{\int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}}}{\frac{2F}{\sqrt{(L)x}}}$ ou par la

quantité $\frac{\int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}} \times \sqrt{(L)x}}{2F}$, on aura la valeur éxacte de T.

256. Or, j'ai trouvé en calculant la ſerie du n°. 249. juſques au 20 ^ème^ terme, que les valeurs $\int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}}$, correſpondantes à celles de x ou l pris ſucceſſivement pour 100, 150, 200, 250, étoient égales aux fractions $\frac{5472970}{100000}$, $\frac{7749419}{100000}$, $\frac{9951592}{100000}$, $\frac{12100565\frac{1}{2}}{100000}$, à moins d'une $\frac{1}{100000^e}$ près, & ces valeurs de $\int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}}$ étant ſubſtituées dans la quantité $\frac{\int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}} \times \sqrt{(L)x}}{2F}$ auſſi-bien que les valeurs correſpondantes de $\sqrt{(L)x}$, & de $F = x$, don-

neront cette quantité $\frac{\int \frac{dx}{\sqrt{(L)\,x}} \times \sqrt{(L)\,x}}{2F}$ successivement égales aux fractions, $\frac{58724}{100000}$, $\frac{57822}{100000}$, $\frac{57267}{100000}$, $\frac{56891}{100000}$ comme on l'a dit dans le n°. 245.

257. On trouvera aussi le quarré de cette même quantité, $\frac{\int \frac{dx}{\sqrt{(L)\,x}} \times \sqrt{(L)\,x}}{2F}$ $= \frac{\overline{58724}^2}{\overline{100000}^2} = \frac{34489}{100000}$ lorsque $x =$ 100, & cette fraction $\frac{34489}{100000}$ multipliant la valeur de TT, trouvée dans le n°. 239. donnera sa valeur exacte à $\frac{1}{100000^{\text{eme}}}$ près, comme on l'a avancé dans le n°. 240.

258. On n'a fait aucune attention dans tous les calculs, à la résistance que l'air extérieur oppose à la dilatation de celui qui est enfermé dans la poudre : mais cette résistance n'est pas considérable, pourvû que la longueur des mousquets ou canons n'excede point la longueur de la charge multi-

pliée par la moitié du nombre qui exprime la force de la poudre. On pourroit même démontrer que les diminutions des quarrés des vîtesses des balles causées par cette résistance, sont aux quarrés de leurs vîtesses entieres, (calculées par la Théorie précédente,) à fort peu près, dans la même proportion que le logarithme du nombre 4, au logarithme qui exprime la force de la poudre, ou plus exactement, comme le logarithme de $\frac{4l-4}{l}$ au logarithme de l.

259. Cette regle suppose la résistance de l'air, aussi grande qu'elle puisse être, & même vrai-semblablement plus grande qu'elle n'est réellement. On trouvera par ce moyen, que, si la force de la poudre est = 100., les vîtesses des balles ou boulets, marquées dans la Table du n°. 244. doivent être diminuées environ de $\frac{163}{1000^{\text{èmes}}}$. Si cette force est = 150. de $\frac{149}{1000^{\text{èmes}}}$. Si elle est = 200. de $\frac{140}{1000^{\text{èmes}}}$; & enfin, si elle est = 250. de $\frac{134}{1000^{\text{èmes}}}$.

260. J'ai calculé sur ces principes, & par une autre méthode plus éxacte, une Table des vîtesses que les balles ou boulets reçoivent de l'action de la poudre, en supposant cette action autant affoiblie qu'elle peut l'être par la résistance de l'air extérieur.



Table des vîtesses des Balles, ou des Boulets.

Forces de la Poudre ou Rapports de la Densité de l'Air qui y est renfermé, à celle de l'Air naturel.

	Longueurs des Charges à l'égard des Calibres.	100	150	200	250
Balles, ou Boulets de Plomb.	1	285	386	476	559
	2	403	546	674	791
	3	494	669	825	968
	4	570	773	953	1118
	5	638	864	1066	1250
	6	699	947	1167	1369
Balles, ou Boulets de Fer.	1	344	466	575	675
	2	487	660	814	955
	3	597	808	997	1169
	4	689	933	1151	1350
	5	770	1043	1287	1510
	6	844	1143	1410	1654

261. Après avoir prouvé, à ce qu'il ſemble, que les propriétés connuës du reſſort de l'air ſuffiſent pour expliquer la force & tous les effets que la poudre peut exercer ſur les corps durs, il reſteroit encore à rendre raiſon de ceux qu'elle produit ſur l'air même, en l'agitant violemment, & en y formant un ſon ou un bruit très-fort ; c'eſt ce qui ne paroit pas difficile à imaginer & à concevoir, dès que l'on a une fois conſidéré cette poudre comme l'amas d'un très-grand nombre de petits reſſorts extrêmement prompts à ſe débander ; & par conſéquent, très-capables d'ébranler l'air & de l'agiter fortement, en agiſſant ſur lui de la même maniere que les petites particules des corps ſonores, dont on parlera dans l'eſſai ſuivant.

262. J'ajoûterai encore deux remarques de pure *Analyſe* ou *Géométrie* ; mais j'en omets les démonſtrations, qui allongeroient trop ce petit Ecrit. La premiere, regarde la maniere de trouver la valeur des abſciſſes *NP* de la courbe *NOM*, (*fig.* 60.) leſquelles, (en nommant toujours la ſomme de la droite *NQ*, & de l'arc *NO*, *S*,

& la droite NQ a, comme dans le n°. 227.) on trouvera égales à la suite infinie $(s - a,) + (\frac{1}{2} \times (\frac{aa}{s} - a)$ $+ (\frac{1}{2.4.3.} \times (\frac{a^4}{s^3} - a) + (\frac{1.3.}{2.4.6.5.}$ $\times (\frac{a^6}{s^5} - a) + (\frac{1.3.5.}{2.4.6.8.7.} \times$ $(\frac{a^8}{s^7} - a) +$ &c.

263. La seconde remarque peut servir d'exemple à la Théorie des sommes des suites infinies, composées d'infiniment petits ; Theorie que M. de *Fontenelle* a expliquée dans la *Section VII.* de la *premiere Partie* de ses *Elémens de la Géométrie de l'infini.* On a vû ci-devant, (no. 246. & suivans,) que l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}}$. de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(L)x}}$ étoit égale à la somme finie de la suite infinie $2y + \frac{2y^3}{3} + \frac{2y^5}{1.2.5} +$ &c. $+ \frac{2y^{200}}{1.2.... \infty - 1.\ \infty.}$ de laquelle les premiers termes sont finis, & les derniers infiniment petits, d'un ordre ex-

trêmement bas. Or, on peut démontrer que cette même intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(L)}\,x}$ est égale à la somme aussi finie de cette autre suite infinie $\frac{2\sqrt{\infty}}{2\infty-1} \times \overline{x^{\frac{2\infty-1}{2\infty}}-1}$

$+ \frac{2\sqrt{\infty}}{2\infty-3} \times \frac{1}{2} \times \overline{x^{\frac{2\infty-3}{2\infty}}-1}$

$+ \frac{2\sqrt{\infty}}{2\infty-5} \times \frac{1}{2.4.} \times \overline{x^{\frac{2\infty-5}{2\infty}}-1}$

$+ \frac{2\sqrt{\infty}}{2\infty-7} \times \frac{1.3}{2.4.6.} \times \overline{x^{\frac{2\infty-7}{2\infty}}-1}$

$+ \frac{2\sqrt{\infty}}{2\infty-9} \times \frac{1.3.5.}{2.4.6.8.} \times \overline{x^{\frac{2\infty-9}{2\infty}}-1}$

$+$ &c. $2\infty \times \frac{1}{\infty\, 1 + \text{ou } 2 -} \times \overline{x^{\frac{1}{2\infty}}-1}$. Or, cette suite est toute composée de grandeurs infiniment petites, dont celles du commencement sont de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ & celles de la fin d'un ordre plus bas que $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, ou d'un ordre moins bas que $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{2}}}$; D'où il suit, par les principes posés par M. *de Fontenelle*, que la somme de cette suite in-

finie est *finie*, ainsi que l'on vient de le dire. Les infiniment petits de cette suite ont aussi des rapports finis & déterminables dans le commencement; le premier étant au second, comme 1 à $\frac{1}{2}$, le 2e. au 3e. comme $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{8}$, &c.

264. On trouvera encore cette même intégrale, $\int \frac{dx}{\sqrt{(L)x}}$ égale à la somme finie de cette autre suite infinie dont les propriétés sont les mêmes que celles de la précédente

$$\frac{\sqrt{\infty}}{\infty} \times 1 + \frac{\sqrt{\infty}}{\infty - 1} \times \frac{1}{2} \times x^{\overline{\frac{\infty - 1}{\infty} - 1}} + \frac{\sqrt{\infty}}{\infty - 2} \times \frac{1}{2.4} \times x^{\overline{\frac{\infty - 2}{\infty} - 1}} + \frac{\sqrt{\infty}}{\infty - 3} \times \frac{1.3}{2.4.6} \times x^{\overline{\frac{\infty - 3}{\infty} - 1}} + \&c. + \ldots + \sqrt{\infty} \times \frac{1}{\infty 1 + \text{ ou } 2 -} \times x^{\overline{\frac{1}{\infty} - 1}}.$$

ADDITION

Au Traité de la Force de la Poudre à Canon, où sont contenues les Propriétés d'une nouvelle Courbe.

CEtte Courbe est celle dont je me suis servi dans cet Essai, pour représenter, suivant la méthode de M. *Camus*, le mouvement d'un Corps poussé par un ressort, dont la roideur diminue à mesure que le corps avance.

Et comme cette Courbe m'a paru avoir quelques propriétés singulieres, j'ajoûterai ici les Théorêmes analitiques, & les conclusions Géométriques qui s'y rapportent, en laissant les démonstrations, qui demanderoient un détail trop grand pour ce petit Ouvrage, plutôt Physique que Mathématique.

DEFINITIONS.

1°. Soit donc, (*fig*. 62. 63. & 64.) *ABC*

cette Courbe, dont la premiere & la principale propriété est, qu'un corps pésant, après être tombé d'une hauteur verticale *DA*, & se mouvant le long de cette courbe de *A* en *B*, *C* reçoive dans chaque point *B*, des augmentations de vîtesse proportionnelles à $\frac{DA}{DA+AB}$; je nommerai cette courbe, *Logarithmoïde*, à cause de ses deux autres propriétés remarquables. La 2e. d'avoir ses abscisses *EB*, égales aux logarithmes des *DA*+*AB*, correspondantes. Et la 3e, d'être asymptotique à la logarithmique *AFG*, laquelle passe par le point *A*, & a pour soûtangente la droite ; ce qui sera mieux expliqué dans la suite.

2°. La droite *DA* sera nommée *le Paramêtre* de la Courbe *ABC*.

3°. La droite *AH* sera son premier axe, la droite *AE*, son deuxiéme axe; les droites *AH* ou *EB*, ses abscisses; & les droites *HB* ou *AE*, ses ordonnées.

Préparation pour les Théorêmes.

1°. On tirera parallelement à *AH*,

& à la distance $AY = DA$, une droite YN, laquelle sera l'axe ou l'asymptote rectiligne de la logarithmique *AFG*, dont les droites *NM* ou *YL* seront les ordonnées, (correspondantes aux ordonnées *HB* de la logarithmoïde,) & les droites *YN* ou *LM* ses abscisses, égales aux abscisses *EB* de la logarithmoïde.

2°. On décrira du rayon *DA* égal au paramêtre de la logarithmoïde, ou à la soûtangente de la logarithmique, & du centre *A*, un quart de cercle *DOI*, sur lequel on prendra les arcs *DO* dont on parlera dans la suite.

3°. On supposera ce rayon *DA* ou le paramêtre de la logarithmoïde, ou la soûtangente de la logarithmique, égale à l'unité $= 1$.

Les abscisses *AH*, ou *EB*, ou *YN*, ou *LM* communes à une de ces courbes $= u$.

Les ordonnées *HB* ou *AE* de la logarithmique $= x$.

Les ordonnées correspondantes *NM* ou Y*L* de la logarithmique $= Z$.

Les arcs *AB* de la logarithmoïde $= s$.

Les

Les soûtangentes QH de la logarithmoïde $= t$.

Les aires mintilignes (*fig.65.*) $APBM = u$.

Enfin, le nombre naturel, dont le logarithme hyperbolique est égal à l'unité $= B$.

Ces noms supposés, on aura les équations suivantes.

THEOREMES.

1. (*fig.62. 63. & 64.*) $s + 1 = B^u = Z$; c'est-à-dire, que les abscisses AH ou EB de cette courbe ABC, sont égales aux logarithmes hyperboliques des sommes $DA + AB$ du paramêtre DA, & des arcs correspondans AB, les logarithmes hyperboliques étant égaux aux ordonnées mêmes YN, LM correspondantes de la logarithmique AMG, & par conséquent, que

2. Les arcs AB de la logarithmoïde sont égaux aux ordonnées correspondantes HM de la logarithmique, à les prendre depuis l'axe AH.

3. $x = (B^{2u} - 1)^{\frac{1}{2}} - A = (SS + 2S)^{\frac{1}{2}} - A = (ZZ - 1)^{\frac{1}{2}}$

— *A*. On suppose dans cette équation, que *A* est un arc du quart de cercle *DOI*, dont la sécante est $= Bq =$ $S + 1 = Z$. Cette équation fait voir que si l'on prend sur le quart de cercle *IOD*, un arc circulaire *DO*, dont la sécante *AÆ* soit égale à la somme du paramêtre *DA*, & d'un arc quelconque *AB* de la logarithmoïde, ou égale à l'ordonnée correspondante *NM* de la logarithmique, l'ordonnée *HB* de la logarithmoïde sera égale à l'éxcès de la tangente *DÆ* de cet arc circulaire, sur cet arc lui-même *OD*; ce qui donne cette construction Géométrique de la logarithmoïde, fondée sur celle de la cycloïde, & de la logarithmique, ou, ce qui revient au même, sur la quadrature du cercle & de l'hyperbole.

4. On décrira 1°. suivant les méthodes ordinaires, (*fig.* 62.) un quart de cycloïde *DFR*, sur le rayon *DA* du quart de cercle générateur *DOI*; on prendra, 2°. sur l'axe *AH* de la logarithmoïde, une abscisse quelconque *AH*, & l'on tirera l'ordonnée indéfinie *HBM*, laquelle coupe la logarithmique en *M*. 3°. Du centre *A*,

& de l'intervalle *E A* égale à l'ordonnée *N M* de la logarithmique, on décrira un arc de cercle *ÆS*, lequel coupe en *Æ* la droite *DÆ* parallele au deuxiéme axe *AE*. 4°. Du point *Æ* au centre *A*, on tirera la sécante *AÆ*, laquelle coupe le quart de cercle *DOI* en *O*. 5°. Par le point *O* on tirera *OF* parallele à *DÆ*, ou *AR*, laquelle rencontre la cycloïde en *F*. 6°. On portera la droite *FO* égale à l'arc *DO* sur la parallele *DÆ*, de *D* en *Z*. Enfin, on portera la droite *ÆL*, $=$ *ÆD* $-$ *DZ* sur l'ordonnée indéfinie *HB* de *H* en *B*, & l'on aura le point *B* cherché, dans lequel la logarithmoïde coupe son ordonnée *HB*.

15. $t = \frac{x}{(zz-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{(ss+2s)^{\frac{1}{2}}}$, ce qui donne deux manieres très-simples, de tirer les tangentes de la logarithmoïde aux points quelconques donnés *B*.

6. La premiere est une suite de la construction Géométrique de l'article quatriéme, & consiste à tirer du point *Z* (trouvé par cette construction,) & parallelement à l'axe *D A* une droite *ZK*, laquelle rencontre la sécante *AÆ* en *K*, ayant ensuite porté cette

droite *ZK* sur l'axe *AH* de la logarithmoïde de *H* en *Q*; on tirera par les points *Q* & *B*, la tangente demandée *QB*.

7. Pour la deuxiéme maniere, on décrira du point *N*, (*fig. 64.*) (où l'ordonnée *NM* de la logarithmique rencontre son axe *ZN*,) & du rayon *NH* = *DA*, un quart de cercle *Ha* 2°. On tirera du point *M* de la logarithmique, une tangente *Ma*, à ce quart de cercle (par E. 17. L. III.) Enfin, du point *B* donné, on tirera parallelement à cette tangente *Ma* la droite *BQ*, laquelle sera la tangente cherchée de la logarithmoïde au point *B*.

8. Il suit de l'article troisiéme, que l'excès de l'arc *AB* (*fig. 62.*) de la logarithmoïde sur l'ordonnée correspondante *HB*, est égal à l'excès de la somme de la sécante *AÆ* de l'arc circulaire *OD*, & de cet arc même sur la somme de la tangente *DÆ*, & du rayon *DA*, auquel excès est aussi égale la droite *BM*, à cause de l'égalité de l'arc *AB*, & de la droite *HM*.

9. Il suit encore de-là, que plus l'arc AB de la logarithmoïde & de son ordonnée *HB* augmente, plus l'excès

du premier sur la deuxiéme approche d'égaler l'excès du quart de cercle entier *DOI* sur le rayon *D A*, en sorte qu'en considérant la logarithmoïde comme prolongée à l'infini, son arc infini *ABC*, & son ordonnée infinie *HB* different entr'elles d'une quantité finie égale à la difference finie du quart de cercle *DOI*, sur son rayon *D A*; c'est-à-dire, en nombres approchés $=$ o, 57080 à $\frac{1}{100000}$ près. Pour avoir cette quantité en ligne, on portera du centre *A*, (*fig.* 64.) sur l'axe *AE*, l'ordonnée *RI* de la cycloïde, (égale au quart de cercle *DOI*,) de *A* vers *E*, jusques en Σ, en sorte que $A\Sigma = IR$, & la droite $I\Sigma$ sera égale à cette difference cherchée.

10. La propriété de la logarithmoïde exposée dans l'article précédent, est analogue à une propriété peut-être déja connuë de la logarithmique, qui consiste en ce que l'arc infini *A G* de cette logarithmique ne differe de son ordonnée infinie *HM*, (à la prendre depuis l'axe *AH*,) que d'une quantité finie, laquelle on déterminera de cette maniere. Prenez l'excès de la sécan-

te de 45°, ou du demi quart de cercle *DOI*, sur le rayon *DA*, lequel excès $= \sqrt{2} - 1$.

Prenez encore le logarithme hyperbolique du rapport du rayon *DA*, & de cet excès, lequel logarithme $= L\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$ vous aurez cette quantité finie égale à la différence dont ce logarithme surpasse cet excès, ou $= L\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) - \sqrt{2} + 1$; c'est-à-dire, en nombres approchés $= 0,46717$ à $\frac{1}{100000}$ près.

11. (*fig.* 64.) Pour avoir cette quantité en lignes, on prendra sur le quart de cercle *DOI*, l'arc *DO* de 45°.

Et après avoir tiré la sécante *AR*, laquelle surpasse le rayon *DA* ou *DO* de l'excès *OR*, on portera cet excès *OR*, sur le rayon *AZ*, de *Z* vers *A* en *X*, & sur la droite *ZN*, de *Z* vers *T* en *V*. Par le point *X*, on tirera la droite *XY* parallele à *DA*, & rencontrant la logarithmique *GA*, (continuée depuis *A* du côté du quart de cercle *DOI*,) en *Y*. Enfin, par le point *Y* on tirera *YT* parallele à *AZ*, laquelle coupera

la droite *ZN* en un point *T*, telle que la droite *TV* sera égale à la quantité demandée.

12. Il suit des articles précédens que si l'on conçoit les arcs *AB* de la logarithmoïde & *AM* de la logarithmique terminés par la même ordonnée *NHBM*, l'arc *AM* de la logarithmique surpassera celui *AB* de la logarithmoïde d'un excès toujours fini, & toujours moindre que la quantité $L\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)-\sqrt{2}+1$, ou que l'abscisse *TV* dont elle approche continuellement, à mesure que ces deux arcs vont en augmentant; en sorte que ces arcs étant supposés infinis, le premier *AMG* surpassera le deuxiéme *ABC* précisément de cette quantité finie $=$ $TV = 0,46717$.

13. Mais si l'on conçoit ces arcs *APF*, *ATB*, (*fig.* 62.) terminés par une même droite *EFB* parallele aux abscisses *AH* ou *YN*, on trouvera que le premier *AF* de la logarithmique sera surpassé par le deuxiéme *AB* de la logarithmoïde, d'une quantité toujours finie, & moindre que l'excès dont la somme du quart de cercle *DOI*, & de

la sécante de 45° surpasse la somme double du rayon *DA*,& du logarithme $TZ = L\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$, cette quantité en ligne est $= IOD + RO - 2DA - TV$, & en nombres aprochés à 0, 10363 à $\frac{1}{100000}$ près. Ces deux arcs *AF* & *AB* prolongés à l'infini, & infinis eux-mêmes, différeront donc de cette quantité finie, & comme l'on voit déterminable en nombres approchés, & exactement en lignes.

14. On trouvera aussi que la distance *BM* des termes *B* & *M* des deux arcs *AB*, *AM*, ou des points correspondans B & *M* de ces deux courbes, pris sur une ordonnée commune *NH*B*M*, on trouvera, dis-je, que cette distance B*M* va toujours en croissant dès le point *A*, où elle est nulle, jusques à l'extrémité la plus éloignée de ces courbes, vers laquelle elle n'est cependant que finie & égale à la droite *I* Σ, (*fig.* 64.) ou à l'éxcés du quart de cercle *DO*I sur ce rayon *DA*; d'où il suit que,

15. Ces deux courbes étant à leur extrémité infinie paralleles entr'elles, &

& à l'axe *AE*. l'angle B*FM* sera infiniment petit ; & par conséquent la distance B *F* infiniment petite. D'où il suit encore, que ces deux courbes *ABC*, *AFG*, après s'être coupées mutuellement en *A*, s'écartent de plus en plus l'une de l'autre, jusques à un certain endroit *b*, dans lequel leur distance *fb* ou *km* prise sur une abscisse commune *Yn*, ou sa parallele *eb*, est la plus grande de toutes : ensuite cette distance va toujours en diminuant jusques à leur extrémité infinie, vers laquelle elle devient comme infiniment petite.

16. Le point *b* de la logarithmoïde, dont la propriété est telle, qu'il se trouve plus éloigné du point correspondant *f* de la logarithmique, qu'aucun autre point *B* de cette logarithmoïde ne se trouve éloigné de son correspondant *F* dans la logarithmique, en sorte que la distance *bf* de ces deux points soit plus grande qu'aucune autre distance semblable *BF*, le point *b*, dis-je, se détermine en prenant l'ordonnée inférieure *nbm* de la logarithmique, (parallele à la supérieure *Kf*,) égale à la sécante d'un arc circulaire *oD*, (du quart de cercle *IOD*)

qui soit égal au rayon *DA*, ou bien en prenant la portion *hbm* de cette ordonnée, ou l'arc *Ab* de la logarithmoïde égal à l'excès de cette sécante sur le rayon ou sur l'arc son égal, lequel excés en nombres approchés, est $=$ 0. 85078, ou bien encore en prenant l'ordonnée *nhb* de la logarithmoïde égale à la tangente de cet arc circulaire égal au rayon, ou la droite *hb* égale à l'excès de la tangente sur le rayon ou sur l'arc.

17. Pour trouver Géométriquement ces points *b* & *f*, 1°. du point *I*, comme centre, & du rayon *Ii* égal à *AI* $=$ *AD*, on décrira un quart de cercle *zfi*, lequel touche la droite *Dzæ* en *z*, & coupe le quart de cycloide *DfR* en *f*. 2°. Par le point *f* on tirera parallelement à *AR*, la droite *of* qui coupe le quart de cercle *DOI* en *O*, en sorte que *Of* sera égale à *DZ*, égale au rayon *DA*, égal à l'arc circulaire *DO*. 3°. Par le point *O* & du centre *A*, on tirera la sécante *Aoæ*, laquelle rencontre la droite *Azæ* au point *æ*. 4°. De *A* vers *R* en *e* & sur *AR*, on prendra une droite ou abscisse *Ae* égale à la droite *Zæ*. Et enfin, par

ce point *e* on tirera parallelement à *HA*, la droite *efb*, laquelle coupera la logarithmique *AG*, & la logarithmoïde *AC* dans les points cherchés *f* & *b*.

18. (*fig.* 66.) Si au lieu de poser l'origine de la logarithmoïde au point *A* (où le deuxiéme axe *AE* rencontre la logarithmique,) on la suppose dans le point *P*, sur le même axe éloigné du point *A* d'un intervalle *AP* égal à l'excès du quart de cercle *DOI*, sur le rayon *AI*, ou égal à *I*Σ, (*fig.* 64.) on trouvera que cette logarithmoïde *PG* sera encore asymptote à la logarithmique *AC*, & même davantage que dans la position précédente, puisque les termes correspondans *B*, *M*, des deux arcs *P*B, *AM*, terminés par une ordonnée commune, s'approchent sans cesse de plus en plus, à mesure que ces arcs augmentent, jusques à se toucher entierement, lorsque ces arcs sont infinis.

19. On trouvera que la différence des longueurs des deux courbes *AC*, & *PG* prolongées à l'infini, n'est que finie & égale à la droite *TV*, trouvée

dans les articles 10. & 11. = 0, 46717.

20. On trouvera encore, dans cette deuxiéme position de la logarithmoïde en *PG* les aires ou espaces mixtilignes *APM*B renfermés par la droite *AP*, les deux arcs *AM* de la logarithmique, & *P*B de la logarithmoïde, & la portion *M*B de leur ordonnée commune, on trouvera, dis-je, ces espaces égaux à la différence de ces deux suites $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4.9.} + \frac{1.3.}{2.4.6.25} + \frac{1.3.5.}{2.4.6.8.49.}$ &c. $- \frac{1}{2z} - \frac{1}{2.4.9.z^3} - \frac{1.3.}{2.4.6.25.z^5} - \frac{1.2.5.}{2.4.6.8.49.z^7}$ &c. dans lesquelles *z* exprime l'ordonnée *NM* de la logarithmique correspondante à cet espace *APM*B.

21. La deuxiéme de ces suites diminuë toujours à mesure que l'ordonnée *NM* & l'espace *APM*B augmente, en sorte que lorsque cette ordonnée est devenuë infinie, cette deuxiéme suite n'est plus qu'infiniment petite, & l'espace *APGC* prolongé à l'infini, se trouve égal à la somme finie de la premiere suite, laquelle en nombres ap-

prochés, est 0, 51800 à une $\frac{1}{100000}$e près.

22. Les propriétés de la logarithmoïde *PG*, comparée à la logarithmique *AC*, & de l'espace infiniment long, renfermé entre ces deux courbes, sont analogues à une propriété déja connuë de l'autre portion infinie *AT* de la logarithmique, comparée à son asymptote droite *TV*; car l'on sçait que l'espace infiniment long renfermé entre ces deux dernieres lignes, n'est que fini & égal au quarré du rayon *DA*, & que la différence des longueurs de la logarithmique *AT*, & de son asymptote droite *TV* supposées toutes les deux infinies, n'est encore que finie, & égale à la droite *TV*, (*fig.* 64.) diminuée de la moitié du logarithme hyperbolique de 2 = 0, 12059 $\frac{1}{2}$.

23. On trouve de plus, que le solide formé par la révolution de cet espace quelconque mixtiligne *APBM* autour de l'axe *AE*, est égal à la somme de cette suite *P*, diminuée de la somme des deux autres *Q* & *R*, & multipliée par le rapport de la circon-

férence du cercle à son diamêtre $=$

$$\left[(P)\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.4.27.} + \frac{1.3.}{2.4.6.125.} + \frac{2.3.5.}{2.4.6.8.343.} \text{ \&c.} - (Q\ \frac{u}{2z} - \frac{u}{2.4.9.z^3} - \frac{1.3.u}{2.4.6.25.z^5} - \frac{1.3.5.u}{2.4.6.8.49z^7} \text{ \&c.} - (R)\frac{1}{2z} - \frac{1}{2.4.27.z^3} - \frac{1.3.}{2.4.6.125.z^5} - \frac{1.3.5.}{2.4.6.8.343.z^7} - \text{ \&c.} \right] \times \frac{C}{D}.$$

24. Les deux dernieres suites Q & R vont aussi en diminuant, à mesure que l'ordonnée *N M* (*Z*) & l'abscisse *LM* (u) de la logarithmique, correspondantes à ces solides augmentent ; de sorte qu'en supposant cette ordonnée & cette abscisse infinies, on trouvera que le conoïde creux infiniment étendu, formé par la révolution de l'espace infiniment long *APGC* autour de l'axe *A E*, n'est que fini, & égal à un cylindre qui auroit pour hauteur le paramêtre *D A*, & pour rayon une droite égale en nombres approchés à 0, 50531 $\frac{1}{2}$. Cette droite ayant le même rapport au paramêtre DA, que la somme de la premiere suite *P* a à l'unité, ce solide sera donc en

nombres approchés = 1, 58749.

25. Il s'ensuit des deux articles précédens, que le centre de gravité de ce conoïde infiniment étendu, n'est éloigné de l'axe *AE* que d'une quantité finie égale en nombres approchés à 0, 48775 $\frac{1}{3}$.

26. La surface courbe intérieure du conoïde creux de l'article 23. formée par la révolution d'un arc quelconque *PB* de la logarithmoïde *PBG* autour de l'axe A*E*, est proportionnelle à l'aire plane correspondante A*LM*, renfermée entre l'arc correspondant A*M* de la logarithmique, son ordonnée A*L*, & son abscisse *LM*, les surfaces courbes étant égales à ces aires planes, multipliées par le rapport de la circonférence du cercle au rayon.

27. De-là suit une maniere fort simple de trouver la distance du centre de gravité de ces surfaces courbes, à l'axe A*E*; car, si par les points *L* & *X*, où les abscisses *LM*, & les ordonnées *NM* de la logarithmique rencontrent les droites A*E*, & A*X*, on tire une droite *LXR*, laquelle rencontre l'axe *YN* en *R*, & que sur cet axe on prenne de *R* vers *Y* en *K*, une droite *RK*

égale au paramêtre *D*A, la droite restante *YK* se trouvera égale à la distance de l'axe A *E* au centre de gravité de la surface courbe décrite par la révolution de l'arc *P* B autour de cet axe A*E*.

28. Il suit de là, que le centre de gravité de la surface courbe intérieure du conoïde infiniment étendu de l'article 24. n'est éloigné de la tangente infinie de la logarithmoïde, (ou de la logarithmique,) que d'une quantité finie égale au paramêtre. Ce Théorême est presque l'inverse de celui de l'article 25.

J'entens par tangente infinie, une droite qui ne touche la logarithmique, que lorsqu'elle est prolongée à l'infini. Cette droite est parallele à l'axe, & coupe les lignes *YN* ou A*X*, à une distance infinie & égale à l'abscisse infinie correspondante, (puisqu'elle n'en différe que d'une quantité finie.) Cette abscisse, quoique infinie, est cependant infiniment moindre que son ordonnée correspondante, ou que cette tangente, & moindre même de plusieurs ordres radicaux, selon les principes établis par M. *de Fontenelle*,

dans ses *Elémens de Géométrie de l'infini.*

29. Les solides formés par la révolution des aires mixtilignes A*P*B*M*, autour de l'axe *YN*, sont égaux à des cylindres, qui ayant pour rayon le paramêtre *D*A, auroient pour hauteur des droites $= y + \frac{1}{6} \times \frac{zz-1}{zz} + \frac{1}{60} \times \frac{z^4-1}{z^4} + \frac{8}{945} \times \frac{z^6-1}{z^6}$ &c.

Par où l'on voit que le solide infiniment étendu, formé par la révolution de l'espace infiniment long autour de cet axe, est infini, mais d'un ordre radical très-bas. Le solide étant égal à un cylindre qui auroit pour rayon le paramêtre & pour hauteur l'abscisse infinie ou de la logarithmique

30. Les surfaces courbes, intérieures & concaves des solides de l'article précédent, formées par la révolution des arcs *P*B de la logarithmoïde, autour de ce même axe *YN*, sont égales à des surfaces planes, dont l'expression algébrique est [$xz - \frac{1}{2} z (zz-1)^{\frac{1}{2}} + L \left(\frac{1}{z-(-zz1)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$

$+Qz] \times \frac{2C}{D}$ dans laquelle Q exprime le quart de cercle *DOI*; comme les Théorêmes de ces deux articles 29. & 30. n'ont rien de curieux, je ne m'y étendrai pas davantage.

31. Cette courbe logarithmoïde, dont on vient de voir les propriétés, est d'autant plus remarquable, qu'elle est la troisiéme & derniere du systême des courbes, dont les ordonnées, abscisses ou arcs, sont alternativement en progression géométrique, & arithmétique. Les deux autres courbes sont, comme l'on sçait, la logarithmique & la tactrice ou tractoire; elles ont toutes trois plusieurs propriétés semblables ou analogues, comme on l'a déja remarqué de quelques-unes, ausquelles on en peut ajoûter plusieurs autres. Mais pour appercevoir plus promptement leurs relations mutuelles, il faudra poser & décrire cette derniere, ou la tactrice, demander qu'elle ait pour asymptote droite, la droite *YV* qui est la même que celle de la logarithmique A*T*, & pour paramêtre ou tangente constante, la droite A*Y* égale à la soutangente de la

logarithmique, ou au paramêtre *D* A de la logarithmoïde.

32. On trouvera alors, par éxemple, que cette tactrice A *P* est asymptotique à la logarithmique, du côté de la convexité de cette derniere, de même que la logarithmoïde lui est asymptotique du côté de sa concavité, dans la position de la *fig.* 65. & du côté de sa convexité, dans la position de la *fig.* 62.

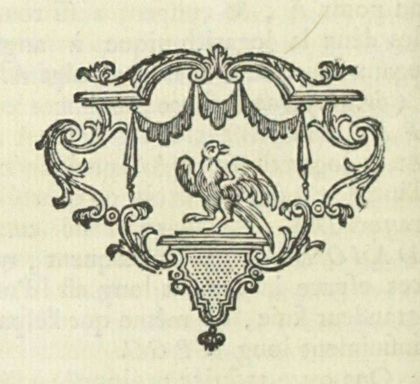
(*fig.* 62.) Cette tactrice & la logarithmoïde se coupent à angles droits au point A, & coupent aussi toutes les deux la logarithmique à angles égaux de 45 dans ce même point A.

(*fig.* 65.) Que l'espace infiniment long *P* A *T*, compris entre la tactrice A *P*, & la logarithmique A *T* prolongées à l'infini, est égal à l'excès du quarré du rayon *D* A, sur le quart de cercle *D* A *I O D*; & par conséquent, que cet espace infiniment long est d'une grandeur finie, de même que l'espace infiniment long A *P G C*.

Que cette tactrice prolongée à l'infini, ne surpasse son asymptote infinie, qui d'une quantité finie égale au loga-

rithme hyperbolique de 2 = 0, 69315.

Enfin, si l'on suppose les arcs A *P*, A *T* de ces deux courbes tactrice & logarithmique, continuellement terminés par une ordonnée commune *P T*, on trouvera que la tactrice infiniment prolongée, surpassera la logarithmique prolongée de même d'une quantité finie $= L(4 - \sqrt{8}) + \sqrt{2} - 1, = 0,0,57255\frac{1}{2}$.





DU MOUVEMENT
DE L'AIR
Dans la Propagation du Son.

CE petit Essai sur la théorie du Son, n'est qu'un développement & une exposition plus détaillée, des principes que M. Nevvton n'a fait qu'indiquer en abrégé, sur cette matiere, dans la Section huitiéme, du second Livre de ses Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle. Ainsi, sans entrer dans aucun détail sur la nature & les propriétés des corps, qui étant frappés, ou ébranlés de quelque maniere que ce soit, rendent un Son, ou font du bruit, (lesquels je nomme par cette raison, Corps Sonores,) sans examiner, dis-je, en quoi ils different, de ceux qui ne rendent aucun son, ou en rendent moins, ni de quelle maniere, l'Air mis en mouvement par l'action de ces

Corps, agit à son tour, & fait impression sur l'organe de l'oüie. Je me bornerai uniquement, comme a fait cet Auteur, à considérer l'impression des Corps Sonores sur l'air, comment l'effet, ou le changement que ces corps produisent d'abord sur les parties d'Air qui leur sont proches, s'étend ensuite à de plus éloignées, par l'action de ces parties les unes sur les autres, & avec quelle vîtesse ce changement ou état nouveau qui leur est survenu, parcourt, pour ainsi dire, toutes leurs suites, jusques à de très-grandes distances.

Article I.

1. C'est un principe reçû des Physiciens, que le mouvement & l'état particulier des parties de l'Air, où se forme le Son, (lequel mouvement n'a jamais lieu que dans le son,) est produit immédiatement par un mouvement à peu près semblable, excité dans les plus petites parties, ou *particules* des Corps Sonores, & que ce mouvement est d'autant plus régulier que ces particules sont plus élastiques,

ou que leur nature approche plus de celle des corps durs, ou solides à ressort; tels que l'yvoire, le verre, ou l'acier, lesquels rendent effectivement le son le plus net & le plus distinct, lorsqu'ils sont frappés.

2. Or, la nature de leur ressort est telle qu'il se bande ou se débande avec une promptitude extrême; de sorte, qu'un très-petit choc suffit pour le bander dans un instant, quoiqu'on ne puisse le retenir dant cet état de bandement, l'espace de quelques momens, sans le secours de pressions très-fortes.

3. Les parties d'air, sur lesquelles les Corps Sonores agissent, sont aussi élastiques; mais leur ressort n'est point, à beaucoup près, si fort, ni si roide, peut-être parce que les plus petites parties dont elles sont elles-mêmes composées, ne sont point pressées les unes contre les autres, comme le sont les parties de ces corps. Mais quelle qu'en soit la cause, c'est un fait d'expérience, que ces parties se bandent & se débandent; ou pour mieux dire, se compriment, & se dilatent beaucoup moins promptement; en sorte, que

ces parties étant d'abord un peu comprimées, & ensuite remises en liberté, elles se dilatent dans un intervalle de tems, qui, quoique beaucoup moindre qu'une minute, seconde, troisiéme, &c. ne laisse pas d'être long, en comparaison de celui que les parties des corps durs à ressort, tels que l'yvoire, &c. emploient à se débander, ou à se rétablir dans leurs situations, lorsqu'elles en ont été retirées par un choc, &c.

4. Si l'on suppose plusieurs corps élastiques posés à côté les uns des autres, dont les premiers soient nommés *P*, les suivans *S*, *R*, &c. on sçait que par une loi commune à tous ces corps, si les premiers *P*, sont comprimés, ils se dilateront ensuite au de-là de leur état ordinaire, malgré l'opposition que les suivans, aussi élastiques dans leur état ordinaire, pourroient apporter à cette dilatation; en sorte que, par l'action de ces premiers *P*, ces seconds *S*, se trouveront à leur tour comprimés, presque dans un aussi grand dégré que les premiers l'avoient été.

5. Supposez que la dilatation des corps

corps *P*, & la compression des corps *S*, qui en est un effet, ait duré, pendant l'intervalle de quelques momens, il est clair, qu'à la fin de ces momens, les corps *S*, doivent reproduire sur les corps *P*, un effet semblable à celui que les corps *P* ont produit au commencement sur eux.

Cet effet sera moindre, mais il ne laissera pas d'être produit pendant un intervalle de momens égal au précédent, parce que la vîtesse avec laquelle les corps élastiques se dilatent, ne dépend pas seulement de la force avec laquelle ils ont été comprimés, mais encore de la résistance qui leur est opposée.

6. Or, la résistance que les corps *P*, qui, pendant ce second intervalle, sont dans un état de dilatation, opposent aux corps *S*, est moindre que n'étoit dans le premier intervalle, à l'égard des corps *P*, celle des corps *S*, dont l'état égaloit l'état ordinaire, tout comme la compression, ou, ce qui est la même chose, la force avec laquelle les corps *S*, tendent à se dilater, est moindre que celle que les corps *P* avoient au commencement.

7. Il se fera donc une alternative de compressions, & de dilatations, toujours moindres entre ces corps, non-seulement pendant ces intervalles, mais encore pendant la durée de plusieurs suivans, jusques à ce que ces compressions & dilatations soient entierement détruites.

8. Mais si les corps *P*, outre qu'ils ont été comprimés, ont de plus été mis en mouvement avec une certaine vîtesse, ils se mouvront quelque peu en avant, malgré la résistance des corps *S*, jusques à ce qu'ils leur aient communiqué toute leur vîtesse, comme ils leur ont communiqué toute leur compression; surquoi il faut remarquer, 1°. Qu'il arrive dans ce cas ici, quelque chose de semblable, à ce qu'on observe dans le choc des corps à ressort égaux, où tout le surplus de vîtesse qui se trouve dans les plus vîtes, passe tout entier dans ceux qui le sont moins, & de ceux-ci à de troisiémes; & ainsi de suite continuellement.

9. 2°. Que dans le second cas, où l'on suppose les corps *P* poussés en avant, aussi-bien que comprimés, il ne doit point arriver entr'eux, & les

corps *S*, les mêmes alternatives de compreſſions, & de dilatations, que dans le cas précédent, du moins ces alternatives ſeront très-inſenſibles, dont la raiſon eſt, que les corps *S*, ayant reçû la vîteſſe des corps *P*, en même tems que leur compreſſion, ils s'éloignent auſſi des corps *P*, en même tems qu'ils ſe dilatent; ce qui empêche l'effet de cette dilatation ſur les corps *P*.

10. Si dans le premier cas, les corps *P*, ont derriere eux d'autres corps *R*, auſſi élaſtiques, ils comprimeront ces corps *R*, en même tems que les corps *S*; ce qui doit rendre deux fois moindre l'état de la compreſſion dans lequel les uns & les autres ſe trouveront à la fin du premier intervalle; & ſi l'on ſuppoſe encore, que les corps *S* ont devant eux d'autres corps ſemblables & élaſtiques *Q*, ces corps *S*, en ſe dilatant avec deux fois moins de force, comprimeront, non-ſeulement les corps *P*, mais encore les corps *Q*, leur communiqueront une compreſſion, qui ſera par cette raiſon encore beaucoup moindre; ce qui fait voir, combien ces alternatives doivent di-

minuer, & même s'anéantir dans peu de tems.

11. Mais dans le second cas, l'état des corps *S*, ne passant point une seconde fois sur les corps *P*, passera tout entier au corps *Q*, tout comme celui des corps *P* a passé au corps *S* : des corps *Q*, il passera de la même maniere à d'autres corps *T*, & ainsi de suite, sans diminuer que très-insensiblement ; & sans jamais retourner en arriere, tout au contraire de ce qui arrive dans le cas précédent.

Article II.

12. Soit supposé un Corps Sonore, dont les petites parties, ou particules élastiques ; 1°. soient comprimées par un choc, & quelque peu poussées en arriere, dans le même corps. 2°. Ces particules, par leur ressort, retourneront en leur premier état, reviendront en avant, dans leur premiere situation, & passeront même au de-là d'une quantité presque égale à celles dont elles avoient été comprimées. Enfin, 3°. Elles reprendront, en se retirant, leur premiere situation : elles auront

donc eu trois mouvemens, deux en arriere, & un seul en avant, mais double à peu près, de chacun des deux autres. Ces trois mouvemens se seront faits avec une très-grande vîtesse, (n°. 2.) dans un fort petit espace, & pendant un tems, qui, par ces deux raisons aura dû être infiniment court.

13. Les parties d'air qui touchent les particules du Corps Sonore, auront éprouvé aussi à peu près les mêmes variations, dont les plus remarquables sont celles qui leur arrivent lorsque les particules du Corps Sonores avancent, en revenant par leur second mouvement.

Les parties d'air étant élastiques, & capables de compression, autant que d'impulsion, plusieurs de ces parties seront toutes à la fois, dans un même moment, comprimées & poussées en avant, par les particules du corps, & d'autant plus fortement, qu'elles en seront plus près, & d'autant moins, qu'elles en seront plus éloignées, de maniere que cet état de compression & d'impulsion, sera à son plus haut point dans la premiere, que je nomme *A*, & ira peu à

peu en diminuant, jusqu'à une certaine partie, que je nomme *B*, laquelle en sera entierement exempte.

14. La somme ou suite de toutes les parties comprises, depuis le Corps Sonore jusques à *B*, doit naturellement agir sur les parties suivantes, les comprimer & pousser peu à peu, & les faire passer par les mêmes états de condensation & de mouvement progressif qu'elles ont subi elles-mêmes, par l'action immédiate des particules du corps, (suivant ce qui a été dit dans le n°. 4, & 8.); mais ces seconds états seront moindres que les premiers; ces seconds en produiront de troisiémes, sur une troisiéme suite de parties d'air; & ces troisiémes seront encore moins considérables que les seconds; & par conséquent, que les premiers, & ainsi de suite, jusques à une derniere somme dans laquelle ils se trouveront presque réduits à rien. Les différentes parties d'air qui composent la seconde, la troisiéme suite, de même que les suivantes, passent toutes successivement & par dégré, de l'état de repos, & de leur expansion ordinaire, à celui de condensation &

de progression, & non pas toutes à la fois ni tout d'un coup, comme il étoit arrivé à celle de la premiere suite, par l'action immédiate des particules du Corps Sonore ; ce qui sera expliqué en détail dans la suite.

16. La vîtesse avec laquelle un de ces états d'une force quelconque, mais déterminée, passe de ces parties les unes aux autres, & les parcourt, pour ainsi dire, est la même que la vîtesse du Son. La détermination de sa quantité précise, déduite *à priori*, par le calcul, & la Géométrie, des loix naturelles du mouvement, & de l'élasticité, font le principal objet de cette Théorie, & l'accord d'une telle détermination, avec celle que l'on connoit *à posteriori*, par les expériences, servira de preuve de la bonté de la théorie, de même que des principes sur lesquels elle est fondée, de la justesse des conclusions qu'on en tire, de la vraisemblance des explications qu'elle donne de certains effets particuliers ; & enfin, de l'éxactitude des calculs.

17. Il s'ensuit de ce qu'il vient d'être dit, que la partie d'air *A*, (n°. 13.) qui touche immédiatement le corps

sonore, ayant été plus comprimée que la seconde dans le premier moment, se dilatera dans le second, & comprimera la seconde partie au même point à peu près, qu'elle l'avoit été elle-même au premier moment, elle la poussera aussi en avant, puisqu'elle se mouvoit plus vîte, & lui communiquera tout le surplus de sa vîtesse; de sorte qu'au bout du second moment, la seconde partie se trouvera dans un état de compression & de mouvement, à très-peu près égal à celui que la premiere possédoit au premier moment, & que celle-ci réciproquement, se trouvera réduite à l'état où étoit la seconde, dans ce même premier moment, (n°. 4 & 8.)

18. J'appellerai dans la suite, état primitif d'une partie d'air de la premiere suite, l'état de compression & d'impulsion, où l'action du corps sonore l'a réduite dans le premier moment.

19. Tout comme dans le second moment, la seconde partie a passé de son état primitif, à celui de la premiere, de même la troisiéme passera de son état primitif à celui de la seconde;

&

& ainsi de suite jusques à la derniere B, qui dans le premier moment, n'ayant été nullement comprimée, ni poussée, commencera à l'être quelque peu dans le second moment, ou au même dégré que l'étoit auparavant la pénultiéme B.

20. De même encore, dans le troisiéme moment, la troisiéme partie se trouvera dans l'état primitif de la premiere; la quatriéme, dans celui de la seconde, &c. jusques à la derniere B, qui sera dans celui de l'antépénultieme B—2, & alors la partie B+1, ou la premiere d'une seconde suite, sera elle même comprimée & poussée, comme l'étoit la partie *B*, dans le second moment.

21. Dans le quatriéme moment, la quatriéme partie passera dans l'état où se trouvoit la troisiéme au troisiéme moment; c'est-à-dire, dans l'état primitif de la premiere, (n°. 20.); la cinquéme passera dans celui de la seconde, & ainsi de suite, jusques à la derniere *B*, qui se trouvera dans l'état primitif de la partie *B* — 3; tout comme la partie *B* + 1, dans celui de la partie *B* — 2, &c. Donc, en général, (si on appelle *n*, & *n* + *m*, les quantiémes nombres d'un moment & d'une

partie) dans un moment quelconque *n*, la partie *n* se trouvera dans l'état primitif de la premiere, & la partie $n + m$, dans celui de la partie $m + 1$.

22. Voilà de quelle maniere l'état violent de toutes les parties d'air qui composent la premiere suite, passera successivement des unes aux autres, par l'action des plus comprimées, & des plus agitées, sur celles qui le sont moins, & passera de plus à toutes celles d'une autre suite, suivant les mêmes dégrés d'augmentation & de communication, jusques à ce que cette seconde suite se trouve au bout d'un grand nombre de momens, (que l'on peut appeller un période de tems) à fort peu près, dans l'état primitif de la premiere, & par-là même, capable de faire sur une troisiéme suite, pendant un second période, le même effet, mais un peu diminué, que la premiere a fait sur elle, &c. (n°. 14.)

23. Les parties d'air précédentes, qui communiquent leur excès de compression & de vîtesse, à celles qui les suivent, les perdent par là même, & passent de leur état précédent, à celui des parties suivantes, & comme il arrive la même chose à celles-ci, à l'é-

gard d'autres parties plus éloignées, il s'enſuit que toutes les premieres parties, qui, dans les premiers momens avoient été les plus comprimées & les plus agitées, le ſeront beaucoup moins dans les ſuivantes, & moins auſſi que les parties qui les ſuivent, (nos. 8. & 11.)

24. Tout comme dans le ſecond moment, la premiere partie a paſſé dans l'état primitif de la ſeconde, (no. 17.) pendant que celle-ci a pris le ſien, comme par une eſpece d'échange; de même dans le troiſiéme moment, cette ſeconde changera ſon état, contre celui qu'occupoit auparavant la troiſiéme, c'eſt-à-dire, (no. 19.) contre l'état où cette ſeconde ſe trouvoit elle-même au premier moment; de maniere, qu'elle reprendra encore une fois ſon état primitif.

25. Dans le quatriéme moment, la troiſiéme partie échangera de même ſon état précédent égal, (no. 20.) au primitif de la premiere, contre l'état précédent de la quatriéme, égal au primitif de la ſeconde, &c. D'où il ſuit qu'en général, dans un moment quelconque n, la partie $n-1$ changera ſon état précédent égal, (no. 17.) au primitif de la premiere, contre l'état précedent

de la partie *n* égal au primitif de la seconde.

26. La direction du mouvement progressif, imprimé à toutes les parties d'air vers le même côté, fait que tous les échanges successifs d'états plus violens contre de moins violens, ne se fait que des précédentes aux suivantes, de même que l'échange des états moins violens contre de plus violens, se fait des suivantes aux précédentes. Il seroit arrivé tout différemment, si les parties eussent été en repos, & ces échanges se seroient faits dans un ordre contraire, si elles se fussent mûes dans un autre sens.

27. On comprendra peut-être encore mieux la maniere dont ces parties agissent toutes en même tems les unes sur les autres, (telles qu'on vient de l'exposer,) si l'on conçoit un des momens dont on a parlé, le second, par exemple, divisé en autant d'autres plus petits instans que la suite contient de parties; supposé que dans le premier de ces instans, toutes les parties comprises depuis le corps sonore jusques à la partie *B* — 1, (lesquelles se mouvoient en avant,) sont pour lors arrêtées, & que cette derniere seule

avance, elle fera impression sur la partie *B*, en lui communiquant dans cet instant toute sa compression & toute sa vîtesse, (n°. 8.) que l'on peut supposer chacune d'un dégré, pendant qu'elle rentrera elle-même dans l'état naturel où étoit la partie B, suivant les loix du n°. 8. Supposez ensuite, que dans le deuxiéme instant, la partie B — 2 avance seule, (les autres parties précédentes restant arrêtées) cette partie qui a deux dégrés de vîtesse & de compression, les communiquera de même, & par les mêmes loix tous entiers à la partie B, qui étoit en repos, & cette partie B — 2, y rentrera elle-même. En continuant ainsi de suite, à supposer que ces parties agissent séparément les unes sur les autres, pendant des instans différens, on trouvera au bout de tous ces instans, ou à la fin du second moment qui en est la somme, que l'état de toutes ces parties sera précisément tel qu'il est décrit ci-devant, (n°. 17. & 21.) Par une semblable maniere de raisonner & de décomposer ces momens, &c. on parviendra aux mêmes conclusions, à l'égard de tous les autres, & l'on trou-

vera les états correspondans de toutes les parties tels qu'on les a déterminés ci-dessus, (n°s. 21. 25.)

28. Or, tous les effets produits séparément, & que l'on n'a conçûs être produits de cette maniere, que pour les appercevoir plus distinctement, ne laisseront pas cependant, d'arriver précisément de même, lorsqu'ils seront produits tous ensemble, mais par parties, pendant la succession de plusieurs instans, ou l'intervalle d'un seul moment.

29. On doit enfin considérer que dans le second ou le troisiéme moment, les particules élastiques du corps sonore, retournent en arriere, & rentrent dans leur premiere situation. Elles laissent donc un petit vuide que les parties d'air les plus proches rempliront, non-seulement en se dilatant au de-là de leur densité ordinaire, mais en revenant aussi en arriere; en un mot, en passant de l'état de condensation & de mouvement progressif à celui d'expansion, & du mouvement régressif, jusques à ce qu'ayant entierement repris leurs premieres places, elles y soient retenuës & comprimées une seconde fois, jusques à

être réduites à leur densité ordinaire, & à l'état de repos, par l'action des parties suivantes, qui ayant été comprimées au commencement, se dilateront ensuite à leur tour.

30. L'état de la premiere partie, qui dans le second moment étoit égal au primitif de la seconde, (n°. 17.) diminuera donc encore dans le troisiéme, tant parce que les particules du corps sonore cedent la place par derriere, que parce que les parties d'air qui suivent, faisant effort pour se dilater, tendent à la repousser en arriere; mais il est vrai-semblable, que cette seconde cause y contribuera d'abord très-peu, ou presque point dans le commencement, à cause du mouvement progressif, imprimé à toutes ses parties, par lequel elles tendent à s'écarter de celles qui les précédent, (n°. 9.) Sur quoi il est bon de remarquer, que celles qui étant les plus comprimées, pourroient, en se dilatant, agir sur les autres avec plus de force, s'en éloignent aussi avec le plus de vîtesse, ce qui rend presque nul, l'effet de cette dilatation, (n°s. 9. & 11.) Elle produira donc seulement un simple ralen-

tissement dans le mouvement, &c. des précédentes.

32. Il est donc très-vrai-semblable, que l'état de la premiere partie ne diminuera, ou ne changera pas tout d'un coup, jusques à devenir égal à son état naturel, mais par quelques dégrés successifs, & pendant l'intervalle de quelques momens. Ce changement se fera, cependant, beaucoup plus vîte, à l'égard de cette premiere partie, & de plusieurs des suivantes ; mais pour la facilité de cette explication, on peut le supposer ici semblable à celui qui arrivera dans les autres parties, c'est-à-dire, à peu près d'un seul dégré dans un moment.

33. Comme les particules solides du corps sonore, sont d'une nature différente des parties de l'air, (n°. 3.) que leurs mouvemens, leurs compressions, & leurs dilatations, sont beaucoup plus promptes, elles doivent agir sur elles d'une maniere différente, de celles dont ces mêmes parties d'air agissent les unes sur les autres.

34. La dilatation & progression subite de ces particules a produit tout d'un coup sur la premiere suite, (n°.

13.) un effet, qui étant transmis dans les autres, par l'action médiate des parties d'air, ne s'y produit que successivement, & peu à peu, (n°. 22.) Il en sera de même du changement que le retour & le rétablissement de ces particules causera dans cette premiere suite, où il arrivera moins régulierement & plus promptement, (sur-tout à l'égard des premieres parties,) que dans toutes les autres suites : mais comme c'est à ce qui se passe dans ces dernieres, qui sont en beaucoup plus grand nombre, que l'on doit faire plus d'attention, par là même, qu'il est plus régulier, on peut, sans aucun inconvénient, supposer la même régularité dans la premiere, puisque c'est elle qu'on s'est d'abord appliqué à considérer.

35. Il suit de-là, que dans ce troisiéme moment, la premiere partie se trouvera dans un état de compression, & de mouvement moindre d'un degré que celui où elle avoit été dans le second moment, ou moindre que l'état primitif de la seconde, (n°. 17.) ou enfin, égal à celui de la troisiéme. Par un raisonnement semblable, on trouvera encore

que dans le quatriéme moment, la seconde partie se trouvera réduite à l'état primitif de la troisiéme, & la premiere, à l'état primitif de la quatriéme; que dans le cinquiéme moment, la troisiéme partie se trouvera réduite à l'état primitif de cette même troisiéme; qu'elle reprendra alors pour la seconde fois, tout comme la seconde avoit repris le sien dans le moment troisiéme, (n°. 24.); que la seconde se trouvera réduite à l'état de la quatriéme, & la premiere, à celui de la cinquiéme; & en général, que dans un moment quelconque n, la partie $n-2$, sera dans l'état primitif de la troisiéme; la partie $n-3$, dans celui de la quatriéme; & la partie $n-m$, dans celui de la partie $m+1$; & par conséquent, la partie $n-1$, dans celui de la seconde, comme on l'a déja trouvé précédemment, (n°. 25.)

36. Donc, (n°. 21. & 35.) dans un moment quelconque n, l'état des parties $n+m$ & $n-m$ est $=$ à l'état primitif de la partie $m+1$, celui de la partie $m+1$, $=$ à l'état primitif de la partie $n-m-1$.

37. Donc, dans le moment *B*, celui

de la partie $B - \overline{B-1}$, ou $B - B + 1$, ſera égal à l'état primitif de la partie $\overline{B-1} + 1$, ou de la partie B ; & celui de la partie B ſera, (n°. 21.) égal à celui de la premiere, c'eſt-à-dire, qu'après un nombre de momens égal à la ſomme de toutes les parties compriſes dans la premiere ſuite, la premiere partie ſera rentrée dans ſon état de repos & de denſité ordinaire, & que la derniere B aura acquis tous les dégrés de compreſſion, & d'impulſion que la premiere poſſédoit au premier moment.

38. Depuis ce moment B, la premiere partie commence à ſe dilater, & à retourner en arriere ; & tout comme la diminution de ſa compreſſion, & de ſon mouvement progreſſif, a duré pendant un tems $= B$, de même l'augmentation de ſa dilatation, & de ſon mouvement régreſſif durera auſſi pendant un tems B juſques à ce qu'ils ſoient à leur plus haut point, après quoi ils diminueront pendant un troiſiéme tems encore $= B$, au bout duquel, elle ſe trouvera enfin, & pour la ſeconde fois, réduite à l'état naturel dont elle ne ſortira plus ſans

une nouvelle impulsion des particules du corps sonore.

39. De même la seconde partie sera réduite à son état naturel, au bout du tems $B + 1$; la troisiéme, au bout du tems $B + 2$; & la partie n, au bout du tems $B + n - 1$: depuis ces momens $B + 1$, $B + 2$, &c. $B + n - 1$. les parties 2, 3, n, commenceront à se dilater & à rebrousser avec une vîtesse qui ira toujours en augmentant, aussi-bien que leurs expansions, pendant un tems $= B$; de sorte qu'elles se trouveront chacune dans leurs plus grandes dilatations, & leurs plus grandes vîtesses régressives à la fin des tems $2B + 1$. $2B + 2$, $2B + n - 1$; & qu'enfin, au bout des tems $3B + 1$, $3B + 2$, $3B + n - 1$, elles rentreront pour la seconde fois, dans leur état ordinaire, pour ne le plus quitter sans une nouvelle impulsion des particules du corps sonore.

40. Au bout du tems B, la partie $B + B - 1$, ou $2B - 1$, sera, (n°. 36.) dans l'état primitif de la partie B, c'est-à-dire, dans l'état ordinaire; & par conséquent, (n°. 37.) égal à celui de la partie 1 ou A dans ce même moment. Toutes les parties comprises

depuis *B* jusques à $2B - 1$, seront plus ou moins comprimées, & dans un plus grand ou moindre dégré de vîtesse progressive, à proportion de leur proximité, ou de leur éloignement de cette partie *B* : ce qui se trouvera encore disposé de même, en retrogradant dans la suite, comprise depuis cette partie *B*, jusques à la premiere *A*. Comme donc toutes les parties qui en sont également distantes de part & d'autre, sont également comprimées, & se meuvent également vîte en avant, il s'ensuit, que cette partie ne peut plus recevoir d'augmentation dans sa compression, ni dans sa vîtesse, & que dès ce moment même, elles commenceront l'une & l'autre à diminuer.

41. D'où il suit encore, qu'à la fin du tems $2B$, elle se trouvera en repos, & dans son état ordinaire, & placée entre deux suites de parties, dont celle qui suit, avance, & celle qui précede, recule, & lui laissent par conséquent la liberté de se dilater des deux côtés; cette partie continuera donc à se dilater avec d'autant plus de force; & non-seulement elle, mais encore celles qui l'avoisinent des deux côtés,

se dilateront de même ; mais ni les unes ni les autres, ne l'empêchent point de se dilater successivement & par dégrés, & elles ne se nuisent point non plus les unes aux autres.

42. Au bout du tems $3B$, elle se trouvera à son plus haut point d'expansion & de vîtesse régressive, & posée entre deux suites de parties, qui toutes les deux rétrogradent, & sont dilatées dans des dégrés égaux à égales distances de part & d'autre. Ainsi par une raison semblable à celle du nº. 40, elle commencera à perdre, & de son expansion, & de sa vîtesse régressive, jusques à la fin du tems $4B$, qu'elle se trouvera réduite à l'état naturel.

43. Dans ce moment $4B$, elle se trouvera placée entre deux suites de parties, dont toutes les précédentes sont en repos dans leur état ordinaire, & les suivantes dilatées, & rétrogradées, mais d'autant moins qu'elles sont moins éloignées de B. Or, ces parties par leur mouvement même retrogradé, contribuent à diminuer peu à peu leur dilatation, & à se mettre en équilibre dans leur état de densité ordinaire ; & par la même raison

encore, elles parviendront enfin à celui du repos. Il paroît assez clairement qu'elles n'en ressortiront plus par l'action d'aucunes parties d'air, ni des précédentes, puisqu'elles y sont déja parvenuës, ni des suivantes qui se meuvent d'une maniere propre à y parvenir elles-mêmes, au bout d'un certain tems. La même chose arrivera à l'égard de toutes les autres parties, & dans toutes les autres suites des parties.

ARTICLE III.

44. La partie *B*, s'est mûë en avant, étant comprimée pendant un intervalle de tems = 2*B*, & pendant 2 autres tems *B*, elle s'est mûë en arriere, étant dans un état de dilatation; & il en sera de même de toutes les autres parties d'air plus éloignées: elles parcourront ainsi toujours deux fois, un même petit espace, que j'appelle *E*, & passeront aussi deux fois, par les mêmes états de compression de dilatation, & par leur état ordinaire. Ce petit espace *E*, doit être supposé presque infiniment petit, en comparaison de la longueur d'une suite; car il sera démontré

ci-après, (n°. 99.) n'être tout au plus que double du petit espace, que les particules du corps sonore ont parcouru en se dilatant, (n°. 12.) ou de la petite quantité, dont elles se sont avancées par leur second mouvement hors de la surface de ce corps.

45. Mais celles qui sont plus proches du corps sonore, (& sur-tout les premieres,) n'éprouveront pas aussi régulierement tous ces changemens. La premiere, par éxemple, ne s'est mûë en avant, (n°. 37. & 38.) que pendant un seul tems *B*; la seconde, pendant un tems *B* + 1, &c. parce que l'action immédiate des particules élastiques du corps sonore les a réduites presque tout d'un coup, ou dans les premiers momens, aux mêmes états ausquels celles qui suivent, ne parviennent que successivement; ce qui se rapporte à ce qui a été dit ci-devant, (n°. 34.)

46. Au bout des quatre tems *B*, les parties 1*B*, 3*B*, & 5*B*, sont dans l'état naturel; la partie 4*B*, dans celui de la plus forte compression, & du mouvement progressif le plus vîte, & la partie 2B, dans celui de la plus grande

de expansion & du plus grand mouvement rétrograde. L'état de la plus grande compression a parcouru tout l'espace compris entre les parties *A* & 4B, dans l'intervalle de 4 tems B : cet espace, égal à celui qui se trouve entre les parties 1B, & 5B, s'appelle *Onde*, & mesure la longueur de cette onde, & la vîtesse de cet état de compression s'appelle *vîtesse de l'onde*. Les parties qui composent une onde, ne se transportent pas elles-mêmes, mais leur état s'y transporte en passant, ou parcourant, pour ainsi dire, successivement toutes ces parties. Cela formeroit aux yeux la même apparence que si les parties elles-mêmes, ou l'onde entiere, se mouvoient en avant; ce qui a donné occasion d'appeller vîtesse, ou mouvement de l'onde, celui qui n'appartient réellement qu'aux différens états des parties qui la composent. On trouvera dans les ondes de l'eau, un exemple sensible de ce qui vient d'être dit.

47. Il paroît clairement par toutes les remarques précédentes, que la différence de l'état de la plus grande compression d'une partie quelconque

n à son état naturel, est l'effet total de l'impression des parties d'air qui ont agi sur elle pendant un certain tems. Le nombre de ces parties doit se compter depuis celle *m*, qui se trouve la plus comprimée jusques à *n*, lequel est par conséquent proportionnel au tems qu'a duré leur action, depuis le moment où cette partie a commencé de sortir de son état naturel, jusques au moment donné. Les parties moyennes entre *m* & *n*, ont toutes contribué à produire quelque changement dans *n*; mais il n'y a que les plus proches qui l'ayent produit immédiatement, & l'action des autres n'est, (pour ainsi dire,) parvenuë à *n*, que par l'entremise de ces dernieres : de sorte qu'elles ont subi elles-mêmes tous les changemens que cette action y a dû causer, avant que les faire subir à *N*; qui les a ensuite éprouvés par leur action immédiate.

48. Cette différence totale entre l'état de la plus grande compression, (lequel je nomme *C*,) & l'état naturel, peut être considérée, comme la somme des petites différences des états moyens, par lesquels cette partie *N* a

passé. Le tems pendant lequel elle les a éprouvés successivement, est de même composé d'un nombre de moments égal au nombre de ces états moyens ; & de même encore, l'impression entiere des parties comprises entre *m* & *n*, n'ayant agi sur *n* que successivement & par dégrés, peut être aussi divisée en autant d'autres plus petites impressions correspondantes à ces petites différences, lesquelles auront passé premierement sur les parties immédiatement proches de *N*, & ensuite sur *n*, chacune dans un de ces momens qu'on vient de nommer.

49. Enfin, cette différence totale peut encore être regardée comme proportionnelle à la différence des forces élastiques réünies des parties comprises entre *m* & *n*, & des forces élastiques réünies d'un pareil nombre de parties prises du côté opposé à *m*, lesquelles sont dans l'état naturel ; puisque ce n'est qu'en vertu de l'excès de ces premieres forces sur ces dernieres, que les parties qui précédent *n*, ont produit quelque effet sur elle ; si ces forces eussent été égales, cette partie *n* seroit restée dans son état naturel ; si

les premieres eussent été moindres, *n* auroit éprouvé des changemens contraires, comme dans le cas du n°.41; mais ces changemens contraires arriveront toujours suivant les mêmes loix, & les mêmes proportions que ceux dont nous parlons, lesquels il suffira par conséquent de considérer.

50. On peut conclure delà, avec beaucoup de vrai-semblance, (surtout, si l'on fait attention au n°. 28.) que la petite différence, qui se trouve entre l'état d'une partie d'air, dans un moment déterminé, & l'état auquel elle se trouve dans le moment suivant, (laquelle différence est égale à celle de l'état présent de cette même partie, & celui de la partie immédiatement précédente,) est seulement proportionnelle à la petite différence des forces élastiques des parties, qui la précédent, & la suivent immédiatement.

ARTICLE IV.

51. Que la ligne 1B, 2B, 3B, 4B, 5B, (*fig.* 66.) représente la longueur d'une onde divisée en ses 4 suites, 1B, 2B 2B, 3B 3B, 4B 4B, 5B, & que

les dégrés d'expansion, ou de compression des parties d'air, soient répréséntés par les perpendiculaires 1B 1*b*, 2B 2*b*, 3B 3*b*, &c. la seule considération de la figure, fait comprendre que ces dégrés doivent varier le plus sensiblement en 1B, 3B, & 5B, où les parties sont dans l'état naturel, & le plus insensiblement en 4B 4*b*, où elles sont les plus comprimées, & en 2B 2*b*, où elles sont les plus dilatées.

52. Si au-dessous de la ligne 1B, 5B, on tire des perpendiculaires 1B 1β, 2B 2β, 3B 3β, &c. réciproquement proportionnelles aux supérieures, ces inférieures représenteront les forces élastiques des parties d'air correspondantes, ces forces étant comme l'on sçait, d'autant plus grandes que le volume, ou l'étenduë des parties est moindre.

53. Si l'on suppose à présent, que les points *L*, *M*, *N*, répréséntent la situation de trois parties consécutives de la suite 4B, 5B, les perpendiculaires supérieures, *L*, *l*, *M*, *m*, *N*, *n*, correspondantes, représenteront les volumes, ou les états de compression de ces trois parties, & les inférieures

L, λ, *M*, μ, *N*, ν, leurs forces élastiques, (n°. 52.) La différence *mp*, entre l'état présent de la partie *M*, & celui de la partie *L*, représente, 1°. la différence de leur compression, & de leur vîtesse progressive; 2°. la différence entre l'état où la partie *M* se trouve dans le moment donné, (n°. 23. & 26.) & celui où elle se trouvera dans le moment suivant; & par conséquent, enfin, le dégré d'augmentation, que sa compression & sa vîtesse ont reçû dans l'intervalle de ces deux momens; cette augmentation sera proportionnelle à la différence λ π, entre les forces élastiques *L* λ, & *N* ν, (= *L* π) des deux parties *L* & *N*, qui la touchent immédiatement, l'une par derriere, & l'autre par devant.

54. On peut encore remarquer, que la différence *sbr*, représente celle de l'état présent de cette partie *M* à son état naturel, ou la différence de sa compression présente à sa compression ordinaire, & la quantité ou la grandeur de sa vîtesse; puisque cette quantité est manifestement égale à la différence, qui se trouve entre ces deux états, quant au mouvement; cette dif-

férence 5, *b*, *r*, est aussi proportionnelle à celle 5 *β ρ* de la force élastique présente à sa force élastique naturelle, ce qui se déduit aisément des principes précédens.

55. Que la ligne *e E ε*, (*fig.* 67. & *fig.* 71.) représente encore le petit espace *E* que chaque partie d'air parcourt une premiere fois en avançant, & une seconde fois en rebroussant, (n°. 44.) pendant un tems égal à celui que l'état de la plus grande compression 4B 4*b*, ou de la plus grande expansion 2B 2*b*, ou tel autre qu'on voudra, comme *L l*, parcourt toute la longueur de l'onde, ou une longueur égale à cette onde.

56. Divisez cette ligne *eEε*, en deux également au point *E*; de ce point comme centre, & du rayon *E e*, décrivez le cercle *e A ε*; divisez encore la circonférence de ce cercle, en autant de petits arcs égaux, tel que *em*, *f* 9, 9 *h*, &c. que l'onde entiere 1 B, 5B, contient de parties, ou (ce qui revient au même,) que le tems, que l'état 4B, 4*b*, de la plus forte compression, ou l'état naturel 3B, 3*b*, (lequel j'appelle *N*,) a employé à par-

courir toutes ces parties, renferme de momens.

57. Il est clair par tout ce qui a été dit ci-devant, 1°. que la partie B, (*fig.* 71.) ne commence à se mouvoir en avant, & à se comprimer, que lorsque l'état *N* est parvenu en *o*B, ou l'état *C* est parvenu en 1B; 2°. que cette partie parcourra la moitié *eE* de son très-petit espace, *e E ε*, pendant que ce même état *N* vient de *o*B, en 1 *b*, ou que l'état *C*, vient de 1B, en *o* B, & qu'elle le parcourt avec une vîtesse variable, ou qui change continuellement; laquelle étant infiniment petite au commencement, (lorsque la partie étoit en *e*, & l'état *N* en *o* B,) est allée peu à peu en augmentant, jusques à devenir d'une certaine grandeur, au moment que la partie est arrivée au milieu *E* de son espace, ou que l'état *N* est arrivé au point 1*b*, lequel on peut, sans aucune erreur sensible, supposer, (n°. 44.) co-incident, ou le même que les points *e*, ou *E*, ou *ε*.

58. Tout ce qui se dit de la vîtesse de la partie B, doit s'entendre de même de sa compression, qui est aussi variable, ou pour mieux dire, de la différence

différence de cette compression, à sa compression, ou densité ordinaire, ou, (ce qui est la même chose, mais en sens contraire) de la différence de son volume variable, à son volume ordinaire, qui ira toujours en diminuant, (& par conséquent, sa compression en augmentant,) depuis le premier moment où elle étoit en *e*, jusques à celui où elle parvient en *E*, son volume se trouvant alors réduit à celui des parties les plus comprimées, lequel est représenté par la ligne *o* B *o* *β*.

59. Sans répéter ici tout ce qui a été dit ci-devant, des divers changemens que cette partie *B* éprouve successivement dans sa vîtesse, dans sa densité, ou son volume, pendant tout le tems qu'elle continuë à se mouvoir, jusques en *ε*, & à revenir ensuite en *e* & pendant le tems que l'état *N* avance de 1*b* en 4*b*, il suffit de remarquer, pour l'intelligence des figures, que cette partie étant en *ε*, & l'état *N* en 2*b*, l'état *C* en 1*b*. un second état *N*, (suivant le (n°. 46.) sera parvenu en *oB*, ou, (n°s. 44. & 57.) en *ε*; & par conséquent, la partie *B* se trouvera dans son état naturel.

60. Lors qu'en retournant en arriere, elle est parvenuë au milieu *E*, de son espace, le premier état *N*, se trouve en 3*B*, & l'état *D*, de la plus grande dilatation en *oB*, ou *E*, (n°. 44. & 57.) & par conséquent, cette partie *B* est la plus dilatée, & retourne en arriere, avec la plus grande vîtesse; dès lors elle commence à se mouvoir plus lentement, jusques à ce qu'étant revenuë à la premiere extrémité *e*, ou au commencement de son petit espace, & le premier état *N*, étant parvenu en 4*b*, le second en 2*b*, & le troisiéme ou dernier en *o B*, ou en *E*, ou *e*, (n°. 57.) cette partie *B*, se trouve enfin, pour la derniere fois, réduite à l'état naturel.

Article V.

61. Il faut à présent, déterminer, dans quelle proportion la vîtesse d'une même partie, varie suivant les differentes distances de cette partie, au milieu *E*, de son petit espace. Le principe du n°. 50. est le même que celui dont M. *Newton* s'est servi, pour découvrir cette proportion; mais au lieu de l'en

déduire *à priori* par l'analyse, il emploie la synthese, & supposant cette proportion connuë, & d'une certaine nature, il démontre l'accord de sa supposition avec le principe, d'où il conclud enfin, la vérité de cette premiere.

62. Cet Auteur suppose donc, 1°. Que les lignes *AE*, *BE*, (*fig.* 6–.) ou les abscisses de diamêtre *e E ε* (à les prendre, depuis le centre *E*) lesquelles représentent les distances de chaque partie *B*, au milieu *E*, de son petit espace, représentent aussi, ou sont proportionnelles aux dégrés de vîtesse que ces parties acquierent en chaque point *B*, ou aux accroissemens que leurs vîtesses reçoivent. 2°. Que les perpendiculaires *b* B, ou les ordonnées du cercle *ε. b. e*, représentent les vîtesses entieres aux points B, & les arcs *e b*, les tems écoulés depuis le premier moment que cette partie a commencé de se mouvoir depuis *e*, jusques au moment, où elle est parvenuë en B.

63. On peut démontrer aisément, comment ces deux dernieres suppositions découlent immédiatement de la premiere, il ne faut que comparer les

augmentations, ou les dégrés de vîtesse que la même partie B, reçoit en différens points, *A. B. C*, de son espace, & entr'eux, & avec le premier dégré qu'elle a d'abord reçû à l'extrémité *e*.

64. Supposez que ce premier dégré de vîtesse, lequel est proportionnel au rayon *e E*, soit encore répésenté par le petit arc *e m*, au point *e*, ou par les petits arcs égaux *a b*, *b c*, &c. aux points *a* & *b* de ces points *a. b. c.* &c. 1°. Abaissez les perpendiculaires, *aA. bB. eC.* &c. 2°. Tirez les rayons *m E*, *a E. b E*; & *c E*, & 3°. les petites lignes *an*, *bo*, &c. paralleles au diamêtre *e E ε*.

65. Le petit triangle *b c o*, a un angle droit en *o*, tout comme le grand triangle *bBE*, en *B*: L'angle *c b o*, est égal au complement de l'angle *E b o*, (à cause de l'angle droit *Ebc*,) & l'angle *E b B*, est égal au même complement; d'où il suit que les deux triangles *b c o*, *b B E*, sont équiangles & proportionnels, l'on prouvera de la même maniere, que les triangles *b a n*, *a AE*, sont aussi équiangles & proportionnels entr'eux.

66. On peut donc faire cette pre-

miere proportion. Le rayon *bE*, est au petit arc *ab* = *em*, comme la grande ligne *BE* proportionnelle au nouveau dégré de vîtesse acquis par la partie au point *B*, est à la petite ligne *co*; d'où il suit que cette même petite ligne *co*, pourra justement représenter ce même dégré de vîtesse acquis au point *B*, tout comme le petit arc *me*, ou *ab* représente le premier & plus grand de tous, acquis à l'extrémité *e*. Mais puisque les momens pendant lesquels ces deux dégrés s'acquierent, sont égaux, ils pourroient aussi être réprésentés par les petits arcs égaux, *ab*, *bc*.

67. Si donc l'on prend sur la circonférence *ec*ε, une infinité de petits arcs *fg*, *gh*, *ab*, *bc*, &c. tous égaux entr'eux, & au premier *em*, & que des points *f*, *g*, *h*, *a*, *b*, *c*. &c. on tire une infinité de perpendiculaires, *fF*, *gG*, *hH*, *aA*, *bB*, *cC*, & de petites paralleles *fs*, *gt*, *an*, *bo*, au diamêtre *eE*ε, il est clair que la somme des momens étant réprésentée par la somme des petits arcs *fg*, *gh*, &c. le tems total, qui est égal à la premiere somme, pourra aussi être justement répré-

sente par l'arc *eh*, qui est égal à la seconde. 2°. Que la somme des dégrés de vîtesse acquis pendant la durée de ce tems chacun dans son moment correspondant sera réprésenté par la somme des petites lignes *sg*, *th*, &c. & par conséquent, la vîtesse entiere, que la partie d'air a acquise à la fin du tems *eh*, par la ligne *hH*; l'on trouvera encore en raisonnant de la même maniere, que la vitesse acquise, à la fin du tems *ec*, sera réprésentée par la ligne *cC*. De plus, la ressemblance de tous les petits triangles *fsg*, *ght*, *anb*, *boc*, &c. avec les grands triangles correspondans *fFE*, *gCE*, *aAE*, *bBE*, &c. (n°. 65.) donne encore cette seconde proportion.

Comme le rayon *eE*, au petit arc toujours constant *em*, ou *fg*, ou *ab*; de même, la vîtesse totale *fF*, *aA*, de la partie d'air, à la fin des tems, *ef*, *ea*,

Aux petites lignes *fs*, *an*.

68. Ces petites lignes seront donc toujours proportionnelles aux vîtesses que le corps possede au commencement de chacun des momens égaux *fg*,

& *ab* ; & par consequent, elles seront exactement parcouruës, avec de telles vîtesses dans tous ces momens égaux. Donc l'espace entier parcouru pendant la durée du tems entier *e h*, &c. ou *e c*, sera égal à la somme de toutes ces petites lignes *f. s. g. t. a. n. b. o.* ou, (ce qui est la même chose,) égal à la somme de toutes les petites lignes *FG*, *GH*, *AB*, *BC*, &c. & par conséquent, enfin, aux grandes lignes *eH* ou *eC* ; ce qu'il falloit démontrer.

ARTICLE VI.

69. Pour démontrer à présent que l'augmentation de vîtesse que chaque partie d'air reçoit dans divers points *B* ou à diverses distances *B E* du milieu *E*, est proportionnelle à la différence des forces élastiques de la partie qui la précede, & de celle qui la suit immédiatement. On observera, 1°. Que la force élastique de ces parties, est directement proportionnelle à leur densité, & réciproquement à leur volume, comme il a été dit ci-devant, (n°. 52.). Ainsi, si l'on exprime le volume variable d'une partie précédente *A*, (*fig.*

68.) par l'indéterminée x, le volume variable de la suivante C, par l'indéterminée z, celui de la partie moyenne B, située en B, par l'indéterminée y & le volume constant, ou déterminé de ces mêmes parties, dans l'état naturel par la constante a, les forces élastiques de ces trois parties, s'exprimeront par les trois fractions correspondantes $\frac{a}{x}$, $\frac{a}{z}$, $\frac{a}{y}$, & la différence des forces de la précédente & de la suivante, par la différence des fractions $\frac{a}{x}$ & $\frac{a}{z}$, ou par la fraction $\frac{az-ax}{xz}$.

70. 2°. Que les milieux des petits espaces que ces parties parcourent sont des points fixes placés les uns à l'égard des autres à des distances égales entr'elles, & égales à celles qui se trouvent entre les centres des parties d'air, dans l'état ordinaire; d'où il suit,

71. 3°. Que si deux parties contiguës se trouvent également éloignées l'une & l'autre des milieux de leurs espaces respectifs, la distance des centres de ces parties, sera la même que

celle de leurs milieux, & la même, par conséquent, que la distance où leurs centres se trouvent dans l'état ordinaire; mais si la partie précédente ou antérieure est moins éloignée du milieu de son espace, que la suivante ou postérieure ne l'est du sien, leurs centres seront plus éloignés entr'eux, que dans l'état ordinaire : au contraire, la distance de leurs centres sera moindre, si la partie précédente est plus éloignée du milieu de son espace que la suivante ne l'est du sien.

72. 4°. Que la quantité dont ces centres se trouvent plus ou moins distants l'un de l'autre, que dans l'état naturel, est égale à la quantité dont la part précédente est aussi plus ou moins éloignée du milieu de son espace, que la suivante ne l'est du sien.

73. 5°. Que cette même quantite est double de l'augmentation, ou de la diminution du volume, que ces deux parties reçoivent chacune dans sa moitié comprise depuis leurs centres, jusques au point où elles se touchent.

6°. Que la quantité, dont une partie *B*, (*fig.* 69.) se trouve dans un moment déterminé plus proche ou plus

éloignée du milieu *b* de son espace, que la précédente *A* ne l'est du sien *a* dans un moment déterminé, est encore égale à la quantité dont cette premiere partie *B* se trouve plus proche, ou plus éloignée de son milieu *b* au moment suivant; & au contraire, que la différence entre la distance *Bb*, où cette même partie *B* se trouve de son milieu *b*, au moment donné, & la distance *Cc*, où la partie suivante *C*, se trouve en même tems, à l'égard de son milieu *c*, est égal à la quantité, dont cette même partie *B* étoit plus ou moins proche de son milieu, au moment immédiatement précédent, ce qui se déduit facilement des n°s. 23. 26. & 53.

74. Soit donc la partie *B*, (*fig.* 68.) placée à la distance *BE*, du milieu de son petit espace *E ε*, & cela, dans un moment déterminé, ou à la fin d'un tems donné, à compter depuis le premier moment où elle a commencé à se mouvoir, lequel tems sera donc réprésenté par l'arc *e b*, (n°. 68.)

75. Dans le moment suivant, déterminé par l'arc *e c*, elle sera en *C* à la distance *CE*, du milieu *E*, & la peti-

te ligne *BC*, sera égale à la quantité dont le centre de cette partie *B*, & celui de la précédente se trouveront plus proches l'un de l'autre que dans l'état ordinaire.

76. De même, dans le moment précédent déterminé par l'arc *e a*, elle étoit en *A*, à la distance *EA*, du milieu *E*; ainsi la petite ligne *A B*, est égale à la quantité, dont son centre & celui de la partie suivante sont plus proches l'un de l'autre, que dans l'état ordinaire.

77. Par conséquent, la somme des deux petites lignes *AB*, *BC*, sera égale à la quantité dont les centres des deux parties précédentes & suivantes sont plus proches l'un de l'autre, que l'état naturel, à la fin du tems déterminé par l'arc *eb*.

78. Le volume de la partie *B*, sera moindre que son volume naturel d'une quantité égale à la moitié de cette somme, ou à la moitié de la petite ligne *AC*; cette moitié peut être supposée sans aucune erreur sensible, égale à l'une des deux petites lignes *A B*, ou *B C*, par exemple, à *BC*, pour chaque point correspondant *B*:

ſi on ſuppoſe le volume naturel d'une partie d'air égal à une ligne déterminée NN, celui de la partie B, (*fig.* 72.) ſera dans ce moment déterminé égal $= NN - BC$; celui de la partie précédente $= NN - AB$, & celui de la ſuivante $= NN - CD$.

79. La force élaſtique de la partie précédente, s'exprime par la fraction $\frac{NN}{NN - AB}$, & celui de la partie ſuivante, par la fraction $\frac{NN}{NN - CD}$, & la différence de leurs forces, par la différence de ces deux fractions $=$

$$\frac{NN}{NN - CD} - \frac{NN}{NN - AB} = \frac{NN \times \overline{CD - AB}}{\overline{NN}^2 - NN \times \overline{CD + AB} + \overline{CD \times AB}}$$

80. Cette fraction peut ſe réduire à unebeaucoup plus ſimple, ſi l'on conſidere 1°. que les petites lignes CD, & AB, ſont effectivement très-petites, par rapport à la grande ligne NN, comme on le verra dans les n°s. 86. & 99. & que par conſéquent le produit de $NN - CD$, par $NN - AB$, peut être ſuppoſé ſans aucune erreur ſenſi-

ble égal à celui de *N N*, par *N N*, ou à NN^2, ainsi cette fraction deviendra égale à $\frac{NN \times \overline{CD - AB}}{\overline{NN}^2} = \frac{CD - AB}{NN}$

81. Or, 1°. cette fraction ayant un dénominateur constant, sera toujours proportionnelle à son numérateur, ou à la différence des deux petites lignes *CD*, & *AB*.

82. 2°. Ces petites lignes étant elles-mêmes proportionnelles aux grandes lignes correspondantes *Bb*, & *Dd*, (n°. 68.) leur différence *CD* — *A* B, sera aussi proportionnelle à la différence *d p* de ces deux grandes lignes, ou ce qui revient au même, à la différence *c n*, des deux grandes lignes B *b*, *C c*, laquelle peut être supposée égale à la moitié de la précédente *b p*, tout comme la petite ligne B *C*, a été supposée égale, (n°. 78.) à la moitié de la ligne, *A C*.

83. Cette petite ligne *c n*, répréſente l'augmentation de la vîtesse, que chaque partie d'air reçoit dans les divers points B de son petit espace; d'où il suit enfin, que cette augmentation de vitesse sera proportionnelle à la dif-

férence $CD - AB$, des deux petites lignes, CD, AB, ou à la fraction $\frac{CD - AB}{NN}$, ou à la différence des forces élastiques des deux parties, qui la touchent immédiatement par devant & par derriere ; ce qu'il falloit en second lieu démontrer.

Article VII.

84. Si du centre *E*, (*fig.* 70.) on décrit un cercle 5B, 4B, 3B, 2B, 1B, dont la circonférence soit égale à la longueur d'une Onde entiere, & que l'on divise cette circonférence en autant de petits arcs égaux 5B 5*b*, *CD*, *DE*, &c. que cette Onde contient de parties, ou que la circonférence du petit cercle *e* 4 *β e*, comprend de petits arcs égaux *ex*, *cd*, *df*, &c. chacun des arcs, 5B 5*b*, C *D*, &c. du grand cercle, sera égal à la ligne *N N* (*fig.* 72.) ou au volume naturel d'une partie d'air.

85. Cet arc 5 B 5 *b* a le même rapport au petit arc *e x*, que le grand rayon 5B*E*, au petit rayon *eE*. Or, le petit arc *ex*, ou *cd*, ou *n* 4*β*, est égal

à la plus grande différence *mE*, que le volume naturel d'une partie d'air puisse recevoir, ce qui lui arrive au point du milieu *E*; d'où il suit,

86. 1°. Que cette plus grande différence *mE*, est cependant très-petite, par rapport au volume entier 5 B 5 *b*, comme il a été dit ci-devant, (n°. 80.)

87. 2°. Que si le grand rayon 5 B *E* répréfente ce même volume naturel, le petit rayon *e E* répréfentera cette plus grande différence, lorsque la partie sera arrivée en *E*.

88. 3°. Que, puisque les lignes *CK*, *d* δ, ont à ce petit rayon *e E*, le même rapport, (n°. *66.*) que les petites lignes *K* δ, δ φ ont avec le petit arc *ex*, ou *cd*, ces lignes *C K*, *d* δ répréfenteront les différences du volume variable de la partie dans les points correspondans *K*, δ, de son petit espace.

89. Ces différences doivent être retranchées du volume naturel, répréfenté par 5 B *E*, ou 4 B *E*, lorsque la partie se meut en avant de *e* en *ε* & ajoûtées au même volume, lorsqu'elle revient en arriere de *ε* en *e*, de sorte

que ses volumes variables au point ξ; K, δ, seront représentés dans le premier cas, par les grandes lignes correspondantes $2ax$, $2cc$, $2dd$; & dans le second cas, par les grandes lignes correspondantes, $2a2\xi$, $2c2K$, $2d2\delta$.

90. Si l'on conçoit, que les parties qui composent l'Onde, 5B, 4B, 3B, 2B, 1B, sont dans les mêmes états respectifs que celle de l'onde, 5B, 1B, dans la figure *66*, selon l'ordre des mêmes lettres 5B, 4B, 3B, 2B, 1B, la premiere partie 5B5*b* qui répond à 5B, sera dans l'état naturel, aussi-bien que la partie 3B3*b*, qui répond à 3B, & que la derniere 1 B 1 *b*; la partie 4B4*b*, sera la plus comprimée, ou réduite au plus petit volume; & la partie 2B2*b*, la plus dilatée, ou réduite au plus grand volume. Ainsi le volume de ces 5 parties, 5B5*b*, 4B4*b*, 3B3*b*, 2B2*b*, 1B1*b*, seront représentées par les grandes lignes, 4B*E*, 4B4β, 4B*E*, 4B2β, 4B*E*. Pour connoître le volume des parties moyennes, comme *CD*, *DE*, ou *IDIC* ... on observera.

91. Que le nombre de momens écoulés depuis le premier, où chacune a commencé à se mouvoir, est égal au nombre

nombre de ces parties compris depuis l'une *CD*, ou l'autre *DE*, jusques à la premiere 5B5*b* ; & par conséquent, proportionnel aux grands arcs correspondants 5B*C*, 5B*D*, ou aux petits arcs semblables *ec*, *ed*, d'où il suit,

92. Que la situation de ces deux parties, à l'égard des milieux de leurs espaces seront déterminées par les points *K δ*, ou que leurs distances à ces milieux, seront égales aux lignes *KE*, *δE*, & les diminutions de leur volume aux petites lignes *Kδ*, *δ φ*, par rapport à leur volume naturel, supposé égal à l'arc *CD*, ou *DE*. Ces mêmes diminutions seront aussi proportionnelles aux lignes *CK*, *dδ*, par rapport à 5B*E*, au 4B*E* ; & par conséquent les volumes variables de ces parties, pourront être réprésentés par ces lignes 2*cc*, 2*dd*. M. *s'Gravesande*, a donné dans ses *Physices Elementa Mathematica*, Tome II. N°. 1222. une Construction Géométrique, semblable à celle de cet Article.

93. Par conséquent, si l'arc 5B5*b*, réprésente le diamêtre, & la situation de la premiere partie d'air de la premiere suite 5B4B par rapport a la lon-

gueur de l'onde, repréſentée par le grand cercle 5B, 4B, 3B, 2B, 1B, ſi l'on tire le rayon $5bE$, qui coupe le petit cercle $\varepsilon 4\beta\ \varepsilon 2\beta$, en x; il s'enſuit de ce qui a été dit dans le n°. 89. que la ligne $2ax$ exprimera le volume de cette partie, par rapport à ſon volume naturel, répréſenté par la ligne $4BE$ ou $2a\xi$; la fraction $\frac{4BE}{2ax}$, exprimera ſa force élaſtique; & la fraction $\frac{4BE}{4BE}$, la force élaſtique de la partie, qui la précede immédiatement, & qui n'eſt point encore comprimée, de même que la force élaſtique de toutes les parties d'air plus avancées, qui ſont auſſi dans leur état naturel : & par conſéquent, la différence de ces forces s'exprimera par la fraction $\frac{4BE}{2ax}$ — $\frac{4BE}{4BE} = \frac{4BE \times 4BE - 4BE \times 2ax}{2ax \times 4BE} = \frac{4BE \times 4BE - 2ax}{2ax \times 4BE} = \frac{4BE \times 2ax}{2ax} = \frac{x\xi}{2ax} = \frac{x\xi}{4BE}$.

94. Or, cette différence, (n°. 50.) eſt égale à la force avec laquelle, la

partie qui précéde immédiatement 5B5*b*, commencera à être poussée en avant, ou à être agitée dans le petit espace *E*, qu'elle doit décrire, & cette force aura même rapport à la force élastique ordinaire des parties d'air, que la petite ligne *x* ξ, à la grande ligne 4B*E*, ou que le petit arc *e x* au grand rayon 5B*E*.

ARTICLE VIII.

95. Comme on a d'abord supposé que la circonférence du grand cercle 5B, 4B, 3B, 2B, 1B, étoit précisément égale à la longueur d'une onde, que le diamètre *c* ε, du petit cercle, étoit aussi précisément égal au petit espace *E*, que chaque partie parcourt deux fois les arcs 5B5*b*, *CD* égaux au volume naturel de ces parties, & les petites lignes *K* δ, δ φ égales aux diminutions de ces volumes; je ne comparerai plus dans la suite ces volumes, ni ces diminutions au grand rayon 5B*E*, ni aux lignes *CK*, *d* δ, pour éviter la confusion qu'un trop grand nombre de comparaisons pourroit causer. Ainsi, reprenant comme

dans le commencement l'arc 5B5*b*, & les petites lignes *K* δ, δ φ, pour la juste mesure de ces quantités, il s'ensuit que le volume variable de chaque partie, comme *CD*, du demi cercle 5B, 4B, 1B, ou de la premiere moitié de l'onde sera égal à l'arc constant, *C D* ou 5B5*b* moins la petite ligne *K* δ, & le volume variable de chaque partie *IDIC*, du demi cercle 3B, 2B, 1B, ou de la seconde moitié de l'onde par ce même arc *ID IC* = 5 B 5 *b*, plus la petite ligne *K* δ.

96. Que la somme des volumes variables de toutes les parties du demi-cercle 5 B, 4B, 3B, sera égale à la somme de tous ces arcs 5B5*b*, *CD*, &c. moins la somme de toutes ces petites lignes *K*δ, δ φ; & par conséquent, la longueur de la premiere moitié de l'onde, égale au grand demi-cercle 5B, 4B, 3B, moins le petit diamêtre *e* ε.

97. On trouvera de même la seconde moitié égale à ce grand demi cercle, plus ce petit diamêtre, & enfin, le premier quart 5B, 4B, de l'onde égal au grand quart de cercle 5B, 4B, moins le petit rayon *eE*.

98. La longueur de l'onde entiere

qui est égale au grand cercle entier, 5B, 4B, 3B, 2B, 1B, est encore égale à l'espace qu'occuperoit un pareil nombre de parties, que l'onde même en contient, & qui seroient toutes dans l'état naturel; car il est clair, & par le n°. précédent, & par tout ce qui a été dit ci-devant, que la quantité dont les unes des parties de cette onde sont comprimées, est précisément égale à celle dont les autres sont dilatées : d'où il suit encore que le grand quart de cercle 5B 4B, sera égal à une somme de parties dans l'état ordinaire égale à celle du premier quart de l'onde, & le petit rayon *eE*, égal à l'excès de l'espace occupé par cette somme, sur l'espace occupé par ce premier quart, ou à la quantité, dont ce premier quart entier se trouve comprimé, ou à sa compression totale.

99. Ce premier quart dans chaque onde se trouve disposé de la même maniere que la premiere suite des parties d'air, sur laquelle le corps sonore agit immédiatement, & dans le premier moment; & la compression entiere de cette premiere suite, étoit égale seulement à la petite dilatation des

particules du corps sonore, ou à la petite quantité dont elles se sont avancées par leur second mouvement, hors de la surface du corps sonore. Ce petit espace est donc, comme l'on voit, égal à la compression entiere de la premiere suite de chaque onde, & de plus, à la moitié du petit espace *E*, que chaque partie d'air, doit parcourir deux fois, ce qui confirme parfaitement la vérité des nos. 44. & 80.

Article IX.

100. L'action, ou impression des parties d'air les unes sur les autres, va toujours en diminuant de suite en suite, ou d'onde en onde, à mesure qu'elles sont plus éloignées du corps sonore, comme il a été dit dans le no. 14. ce qui sera expliqué plus en détail dans la suite. D'où il suit, que la compression particuliere de chaque partie, & la compression totale de chaque suite, & par conséquent les petits espaces que chacune de ces parties décrivent, décroitront toujours dans la même proportion, pourvû que chaque suite ou chaque onde, soit toujours suppo-

sée composée d'un même nombre de parties, & par conséquent d'une même longueur. Le tems que ces parties employent à parcourir deux fois leurs petits espaces décroissans, est encore toujours le même, puisque ces petits espaces sont exactement proportionnels aux plus grandes compressions, ou aux plus grandes dilatations, & par conséquent, aux plus grandes vîtesses que ces parties possedent au milieu de ces espaces. Mais ces plus grandes vîtesses, ont un rapport semblable aux vîtesses moindres, que ces parties possedent à des distances semblables de leur milieu; & de même, les petites portions de leurs espaces, qu'elles parcourent avec ces vîtesses, sont encore dans le même rapport; & par conséquent, elles seront parcouruës dans des momens égaux: le nombre de ces petites portions semblables est le même dans differens espaces. D'où il suit, que tous ces différens espaces seront aussi parcourus dans un même nombre de momens égaux, c'est-à-dire, dans un tems entier toujours égal & constant. Il suit de là, & du n°. 44. que l'état de la plus grande compression,

ou de la plus grande dilatation, ou tel autre état semblable, parcourt aussi la longueur des différentes ondes, en des tems égaux ; & puisque ces ondes sont toutes supposées d'une même longueur, il suit encore que la vîtesse de cet état qui est la même que celle du Son, sera par tout uniforme, soit dans les premieres ondes, où il est le plus fort, soit dans les dernieres, où il s'anéantit insensiblement.

101. Si leurs longueurs étant différentes, leurs compressions totales sont cependant égales, la vîtesse de cet état subsistera encore la même. Car il est clair, 1°. Que la plus grande compression, & par conséquent, la plus grande vîtesse de chaque partie augmente ou diminuë en proportion réciproque du nombre des parties contenuës dans ces ondes, ou de la longueur des ondes : de sorte que le tems entier qu'elles employeront à décrire leurs petits espaces, croîtra lui-même ou décroîtra en proportion directe de cette longueur, (ce dont on peut s'assurer en raisonnant ici de la même maniere que dans le n°. 100.) Ce tems est égal à celui pendant lequel l'état de la plus

plus grande compression parcourt cette longueur, & puisque la vîtesse dont elle est parcouruë, consiste dans le rapport de cette longueur au tems; il s'ensuit que cette vîtesse sera encore la même que dans le cas précédent. On peut enfin conclure de ce qui vient d'être dit, que cette vîtesse, que j'appellerai désormais vîtesse du Son, reste toujours la même, ou uniforme dans toutes les ondes, de quelque maniere que varient leurs compressions totales, & leurs longueurs, ce qui paroîtra évident par la comparaison de trois ondes d'air différentes *A*, *B*, *C*; Que les deux premieres, *A*, & *B*, soient d'une égale longueur, mais différemment comprimées, la vîtesse du Son sera la même dans l'une & dans l'autre, par le n°. 100. 2°. Que la troisiéme *C*, étant autant comprimée que la seconde *B*, soit d'une longueur différente, la vîtesse du Son ne laissera pas d'y être encore la même que dans la seconde B, par ce qui vient d'être dit, & par conséquent la même que dans la premiere *A*, quoique cette premiere *A* & cette troisiéme *C*, différent, & dans leurs longueurs, & dans leurs totales compres-

sions. Ce théorême, sur l'égalité ou l'uniformité de la vîtesse du Son, auroit pû se déduire, mais peut-être moins clairement, & plus généralement de cette proposition.

Que les plus grandes compressions particulieres, & les plus grandes vîtesses des parties croissent, ou décroissent en raison directe de leurs petits espaces, ou des compressions totales des Ondes, & en raison réciproque des longueurs de ces Ondes.

102. Comme le plus ou moins de force, avec laquelle les particules de différens corps sonores agissent sur l'air, se réduit uniquement, ou à comprimer plus ou moins un même nombre de parties d'air, ou à comprimer également un plus grand, ou un plus petit nombre ; ou, ce qui est le même, à augmenter ou diminuer la compression totale ou la longueur des ondes ; Il est clair, par les n°s. précédens, que sans déterminer quel de ces deux effets doit plutôt avoir lieu, ni l'un ni l'autre, cependant, ne causeront aucun changement à la vîtesse du son ; mais on verra dans la suite, que c'est principalement de l'impulsion plus ou

moins violente de ces particules, que dépend la force ou la foiblesse du son: d'où il suit enfin, que tous les sons quelque véhémens ou quelque légers qu'ils soient, lorsque cette cause en est la seule, ne laisseront pas de se propager avec une égale vîtesse.

ARTICLE X.

103. Si l'on connoissoit le rapport du tems employé par chaque partie d'air, à parcourir deux fois son petit espace (lequel tems j'appellerai désormais révolution de cette partie,) avec le tems employé par un corps quelconque, qui se mouvroit précisément de la même maniere que cette partie, & dans un espace semblable, & dont le rapport avec l'espace *E*, fût aussi connu; si, dis-je, la proportion de ces deux rapports, c'est-à-dire, la proportion du rapport entre les révolutions de la partie d'air, & du corps, & du rapport entre leurs espaces, étoit connuë, on connoîtroit aussi exactement la proportion de leurs plus grandes vîtesses, dans le milieu de leurs espaces. Si à la place de l'espace par-

couru par la partie, on substituë la longueur de l'onde parcouruë, par l'état de la plus grande compression, dans l'intervalle d'une révolution de cette même partie, & si la proportion du rapport entre cette longueur & l'espace parcouru par le corps, & du rapport entre les deux révolutions du corps, & de la partie étoit connuë, on pouroit encore trouver la proportion de la plus grande vîtesse du corps, avec celle de l'état de compression; de sorte que, si ce corps étoit assez à notre portée, pour pouvoir déterminer immédiatement, ou par observation, sa plus grande vîtesse réelle, on pourroit connoître aussi par le moyen de cette proportion, la vîtesse réelle du Son. De sorte que, il reste à présent à connoître quels sont les corps qui ayent les deux propriétés de se mouvoir précisément de même que les parties d'air, & de pouvoir être le sujet de nos expériences, & de quelle maniere on pourra comparer leurs mouvemens & leurs vîtesses, avec celles de ces parties, & avec la vîtesse du Son, ce que l'on va essayer dans les articles suivans.

104. Il est connu des Physiciens, & démontré par M. Nevvton même, que les corps pendules qui font leurs vibrations en décrivant la circonférence d'une cycloïde, se meuvent dans cette circonférence, suivant des loix, ou des conditions entierement semblables à celles qui ont été rapportées dans le n°. 62. & appliquées ensuite au mouvement des parties d'air dans leurs petits espaces rectilignes : de maniere que tout ce qui a été dit des augmentations ou diminutions de vîtesse, que ces parties reçoivent dans les différens points de leurs espaces, doit s'entendre précisément de même des dégrés de vîtesses que ces corps pendules acquierent ou perdent, par l'action de la pésanteur à différentes distances du milieu, ou du point le plus bas de cette circonférence. Ces dégrés ou accroissemens de vîtesses étant toujours proportionnels aux portions curvilignes de cette circonférence, comprises depuis les différens points où ces corps se trouvent jusques au point inférieur, ou aux distances curvilignes du corps à ce même point; il en est de même de leurs vitesses entieres des tems em-

ployés à décrire ces portions. Pour rendre cette comparaison plus aisée, on n'a qu'à supposer la cycloïde rectifiée, ou égale à une ligne droite, décrire sur cette ligne comme diamêtre, un demi cercle, & comparer ensuite les arcs de la cycloïde aux portions de cette ligne droite.

105. Ces propriétés du mouvement des corps pendules, se trouvent démontrées & expliquées dans plusieurs Auteurs, aussi bien que les trois propositions suivantes, que je me contenterai seulement de rapporter, parce que leur démonstration m'écarteroit trop de la question présente. 1°. Que la circonférence entiere de la cycloïde est double de la longueur du fil, auquel les corps pendules sont suspendus, ou que ce fil est égal à la moitié de la ligne droite, supposée égale à la cycloïde rectifiée, ou au raïon du cercle décrit sur cette ligne.

106. Que si plusieurs corps pendules sont suspendus à des fils de différentes longueurs, & parcourent par conséquent des circonférences entieres de cycloïdes différentes, les tems qu'ils employent à les parcourir, sont en-

tr'eux comme les racines quarrées des longueurs de ces circonférences, ou ce qui revient au même, des longueurs de leurs fils.

107. Que si plusieurs corps pendules suspendus à des fils égaux en longueur sont agités, ou mis en mouvement, par des pésanteurs de différentes forces, (c'est-à-dire, par des pésanteurs qui agissant sur un même corps le pousseroient vers le centre de la terre, avec différentes forces, ou le feroient descendre avec différentes vitesses, & le rendroient par conséquent plus ou moins pésant,) sont en proportion renversée des racines quarrées de leurs pésanteurs.

108. Il est à propos de remarquer ici, que la différente grosseur ou masse des corps pendules, ne contribue nullement à rendre les tems de leurs vibrations plus longs ou plus courts; pourvû que les pésanteurs qui les agitent soient d'une même force, c'est-à-dire, les fasse descendre vers le centre de la terre, avec une même vitesse, ou les rende plus ou moins pésans exactement, suivant le plus ou le moins de quantité de matiere, que

ces corps contiennent.

109. On voit par-là, que si deux corps ayans des masses ou des quantités de matieres différentes, sont cependant également pésans, les pésanteurs qui les agitent, ou les poussent vers le centre de la terre, doivent agir inégalement sur eux, & les faire descendre avec des vitesses inégales : mais pour éviter toute équivoque, il paroît, qu'il faut distinguer deux especes de pésanteurs ; l'une que l'on appelle ordinairement *gravité*, est cette force ou cette cause générale, qui pousse tous les corps vers le centre de la terre, en imprimant dans des instans égaux, & infiniment petits, aux plus petites particules égales, dont ces corps sont composés, des dégrés de vitesse égaux & infiniment petits ; & de même des quantités de mouvement égales & infiniment petites ; & en tant que l'on conçoit cette force, agissant de cette maniere, on dit qu'elle agit également sur tous ces corps, ou qu'elle est par tout uniforme & d'une égale force ; mais si l'on conçoit que dans quelques endroits de la terre, comme par exemple, sous l'Equateur, ou sous

les Pôles, elle communique dans les mêmes instans, infinimens petits & égaux, à ces mêmes particules, des dégrés infinimens petits de vitesse, & de quantité de mouvement, moindres ou plus grands, que ceux qu'elle leur communique ailleurs ; on dit alors qu'elle n'agit pas uniformément, ou qu'elle est d'une force inégale. La seconde espéce de pésanteur, auquel on pourroit conserver ce nom particulier de *pésanteur*, est cette force particuliére & déterminée, avec laquelle chaque corps différent, tend à descendre vers le centre de la terre, dès le premier instant que la gravité a imprimé à toutes ses particules un degré infiniment petit de vitesse, & de quantité de mouvement.

110. Or il est évident que cette force ou pésanteur est d'autant plus grande ; 1°. Que ce degré infiniment petit de vitesse communiqué dans ce premier instant à chacune de ses particules, est plus grand, ou suivant la définition précédente, que la force de la gravité est plus grande.

2°. Que ces particules elles-mêmes

sont en plus grand nombre , ou que ce corps a plus de masse ou de quantité de matiere. On donne encore le nom de *poids* à cette pesanteur particuliere de chaque corps , en tant qu'on la considere comme une force propre à chacun d'eux & distincte , pour ainsi dire de la gravité ; mais lorsqu'on la considere plûtôt , comme un effet de cette gravité, qui est appliquée avec plus ou moins de force sur des corps de masses plus grandes ou plus petites , on l'appelle *intensité* de cette gravité.

111. Lorsqu'on veut comparer les forces de gravité qui agissent sur deux corps pendules , il suffit de comparer les dégrés infiniment petits de force & de vitesse, qu'elles leur communiquent en des points semblables de leurs circonférences cycloïdales , comme à l'une des extrémités de cette circonférence , dans lesquelles ces gravités agissent le plus fortement sur eux , (à cause de la direction verticale des petites portions de la cycloïde en ces deux points) & leur communiquent par cette raison le même petit dégré de vitesse, qu'elles communiqueroient

dans un instant égal au corps, qui tombe le plus librement.

ARTICLE XI.

112. C'est un principe reçû des Physiciens que la force élastique entiere de chaque partie d'air (dans l'état ordinaire où ses parties se trouvent dans la plus basse région de l'atmosphére) est équivalente (*æquipollens*) au poids de la petite colomne d'air, qui s'étend en haut depuis cette partie, jusques à la surface supérieure de l'atmosphére, ou que cette partie en se dilatant avec toute cette force, & dans un instant, communiquera à une autre partie semblable à elle, (mais qui ne lui feroit point de résistance,) le même dégré de vitesse que la pression de cette colomne d'air pourroit lui donner ; lequel on sçait encore être égal à celui que cette autre partie recevroit dans le même instant, par l'action d'une gravité, aussi forte en comparaison de la gravité ordinaire que le poids de cette colonne est grand, en comparaison de celui d'une seule partie.

113. La densité des parties de l'air

décroit toujours à proportion que leur hauteur augmente, ce qui fait que la hauteur entiere véritable de l'atmosphére, est beaucoup plus grande, que si cette densité étoit la même par-tout. Cette hauteur véritable est presque absolument indéterminée, parce qu'on ignore suivant quelle proportion cette densité varie précisément; mais la hauteur supposée dans le second cas peut se déduire assez exactement du poids des colonnes d'air, comparées à des colonnes d'eau ou de mercure de même baze, & de même poids desquelles la hauteur est connuë par expérience & du rapport de la densité de l'air à celle de l'eau ou du mercure, connu aussi de la même maniere; & de ces deux principes, M. *Nevvton* a déterminé la hauteur de l'atmosphere, (dans le cas de la densité uniforme,) à peu près de 29725 piés d'Angleterre, ou de 27867 piés de Paris.

114. Supposez cette hauteur égale à une ligne droite donnée, *A*, (*fig.* 73.) Il est clair que le poids d'une partie d'air sera au poids de la colonne d'air qu'elle soûtient au-dessus d'elle, comme le diamêtre de cette partie, à la

hauteur de cette colonne, (supposée d'une densité uniforme, (égale à la longueur *A*, & par consequent, (n°. 112.) que la force ou l'action de la gravité ordinaire sur cette partie, sera à la force de la pression de cette colonne, ou à la force élastique de cette partie, dans la même proportion du diamêtre de cette partie à la longueur *A*.

ARTICLE XII.

115. Le rapport du tems employé par une partie d'air, à parcourir deux fois son petit espace *E*, ou, (n°. 103.) de sa révolution, avec le tems de deux vibrations d'un corps pendule quelconque, dépend, (n°s. 106. 107. & 193.) des trois rapports suivans, 1°. Du rapport de la longueur du petit espace *E*, décrit par la partie avec la circonférence cycloïdale decrite par le corps, ou du rapport de la demi longueur de ce petit espace, = (*fig.* 75.) *Ee*, avec la longueur du pendule, ou du fil auquel le corps est attaché. 2°. Du rapport de la force de la gravité ordinaire, avec la force élastique totale d'une partie d'air, & 3°. Du rapport

de cette force élastique entiere, à la petite force particuliere, (n°. 93. & 111.) dont chaque partie est poussée au commencement de son petit espace.

116. Pour suivre plus facilement tous ces rapports l'un après l'autre; supposez, 1°. un corps quelconque suspendu à une pendule d'une longueur égale à la ligne *A*, & agité dans ce pendule par la force de la gravité ordinaire, & 2°. une partie d'air suspenduë aussi en pendule, à un fil d'une longueur égale à la moitié de son petit espace, ou égale au petit rayon *e E*, (*fig.* 75.) & qu'elle fût agitée dans ce pendule, par une force égale à celle de son poids, ou, (n°s. 109. & 110.) ce qui est le même, par la force de la pésanteur ordinaire.

117. Il s'ensuit, 1°. du n°. 106. que la durée des vibrations de cette partie, seroit à la durée des vibrations du pendule *A*, comme la racine quarrée du petit rayon *e E*, à la racine quarrée de la longueur *A*, ou comme $\surd\, eE$, à $\surd\, A$. 2°. Que cette partie d'air se mouvroit précisément, (n°. 104.) de la même maniere dans son petit espace *E*, si elle y étoit agitée suivant les

loix des n°. 50. & 62. & par une force égale à son poids. 3°. Que la durée de la révolution de cette partie mûë dans son petit espace, seroit égale à la durée de deux vibrations, qu'elle feroit étant mûë en pendule, & par conséquent, que le tems de sa révolution, ou, (n°. 44.) le tems employé par l'état de la plus grande compression à parcourir toute la longueur d'une Onde, auroit le même rapport au tems des deux vibrations du pendule *A*, que $\surd eE$ à $\surd A$.

118. Mais la partie d'air est agitée, ou poussée par une force différente de la gravité, & dont le rapport avec cette derniere, dépend, 1°. du rapport de la différence des forces élastiques des deux parties d'air, qui la touchent immédiatement, à sa force élastique entiere, & 2°. du rapport de cette force élastique, à celle de la gravité. Le premier a été trouvé, (n°. 93.) le même que celui du petit arc *ex* au grand rayon 5*BE*; & le second, (n°. 114.) le même que celui de la longueur *A*, au diamêtre de la partie d'air, répresenté par le grand arc 5B*A*; d'où il suit, que la force avec laquelle une

partie d'air commence à être poussée dans son petit espace, est à celle de la gravité en rayon composée du petit arc ex, au grand rayon $5BE$, & de la longueur A, au grand arc $5BA$, ou en raison de $ex \times A$, à $5BE \times 5BA$, ou de $ex \times A$, à $5BA \times 5BE$, ou (puisque ex, est à $5BA$, comme eE est à $5BE$,) en raison de $eE \times A$, à $5BE \times 5BE$.

119. Par conséquent, (n°. 106. 107. & 115.) le tems de la revolution de cette partie sera au tems de deux vibrations du pendule A, en raison composée de $\sqrt{eE}$, à $\sqrt{A}$, & de $\sqrt{5BE \times 5BE}$ à $\sqrt{eE \times A}$, ou de $\sqrt{eE \times 5BE \times 5BE}$ à $\sqrt{A \times eE \times A}$, ou de $\sqrt{5BE \times 5BE}$, à $\sqrt{A \times A}$, ou enfin, en raison de $5BE$ à A.

120. Il s'ensuit donc que le tems employé par l'état de la plus grande compression à parcourir la longueur d'une onde égale au cercle 5B, 4B, 3B 2B, 1B, est au tems de deux vibrations du pendule A, dans la même proportion que le rayon $5BE$, de ce cercle à la longueur A de ce pendule, ou que ce cercle même, 5B, 4B,

3B,

3B, 2B, 1B, à un cercle décrit d'un rayon égal à la ligne *A*, & par conséquent, que la vîtesse de l'état de la plus grande compression, ou la vîtesse du son est la même que celle d'un corps qui parcouroit le cercle décrit du rayon *A*, dans le tems de deux vibrations du pendule *A*, puisqu'il est clair que des corps qui parcourent des espaces différens, pendant des tems proportionnels à ces espaces, ont des vîtesses égales.

121. La ligne *A*, ayant été déterminée ci-dessus, (n°. 113.) d'environ 27867 piés de Paris, on trouvera, 1°. que la circonférence du cercle dont elle est le rayon, sera de 175094 piés, & 2o. Que le tems de deux vibrations du pendule *A*, sera de 191 secondes, puisque par la regle de l'art. 106. la racine quarrée de la longueur *A*, de 27867 piés est la racine quarrée de 3 piés 8 lignes, longueur du pendule, qui fait deux vibrations dans deux secondes de tems, à peu près comme 95, ou 96, à 1. La vîtesse du son sera donc égale à celle d'un corps, qui parcourroit un espace de 175094 piés, dans l'intervalle de 190 secondes, ou un espace

de 918 piés dans une seule seconde de tems.

ARTICLE XIII.

122. Si les parties de l'air étoient toutes homogênes, parfaitement élastiques, & parfaitement compressibles, en sorte que leurs volumes pussent être diminués à l'infini, par des pressions toujours croissantes, & réciproquement proportionnelles à ces volumes décroissans ; la vîtesse du son, telle qu'on vient de la déterminer, seroit effectivement la même, que celle qu'on a observée par expérience : mais ces parties ne sont compressibles que jusques à un certain point ; en sorte que selon quelques expériences, elles ne paroissent pas pouvoir être réduites à plus de la 800ème partie de leur volume ordinaire, & même les pressions qui les réduisent en cet état, doivent augmenter dans une beaucoup plus grande proportion, que ces volumes ne diminuent.

123. D'un autre côté, si ces mêmes parties n'étoient nullement compressibles, l'impression des particules du corps sonore, se transmettroit des plus

proches aux plus éloignées, dans un seul instant, ainsi qu'il arrive à l'impression des corps lumineux, sur les rayons de lumiere, dans le systême de *Descartes*, & comme il arriveroit peut-être à l'impression de quelques corps que ce soit, sur un liquide tel que l'eau, pourvû que cette impression se fît à une certaine distance de sa surface.

124. Supposez donc que les parties d'air fussent réduites au plus petit volume qu'elles puissent avoir, sans perdre entierement leur force élastique, en sorte, qu'étant diminuées tant soit peu davantage, elles devinssent incompressibles, comme sont celles de l'eau: ce qui arrive lorsque leur volume ordinaire, ou lorsque leur diamêtre est réduit environ à sa 9eme partie; il s'ensuit que l'impression des particules des corps sonores, se propageroit presque dans un instant, depuis ces corps, jusques à de très-grandes distances, (n°. 123.) & non point par succession de tems, comme il arrive dans l'air naturel.

125. Il est clair par là, que le diamêtre incompressible des parties d'air, étant 9 fois, ou, (comme M. *Newton*

le suppose,) 10 fois plus petit que l'intervalle entre leurs centres, il sera égal à la 9^{éme} partie de l'intervalle qui se trouveroit entre les parties d'air elles-mêmes, si elles étoient autant comprimées qu'elles peuvent l'être. Or, cette 9^{éme} partie doit augmenter la vîtesse du son à peu prés dans la même proportion, c'est-à-dire, environ de sa 9^{éme} partie, ou de 102 piés par seconde de tems, lesquels ajoûtés à 918 piés, donnent cette vîtesse de 1020 piés, beaucoup plus approchante de la véritable.

126. Mais elle ne laissera pas d'être encore un peu moindre, à cause du mélange des parties aqueuses ou salines, &c. répanduës dans l'air, lesquelles ne sont pas compressibles. Mr *Newton* suppose que cette seconde cause d'augmentation va à peu près à une 20^{éme} partie ; ce qui donneroit enfin la vîtesse du son de 1071 piés. Cette détermination s'accorde assez bien avec les expériences immédiates, par lesquelles on l'a trouvée environ de 1070 piés, (n°. 16.)

ARTICLE XIV.

127. On n'a considéré jusqu'ici, la Propagation du Son, ou du mouvement particulier de l'air, qui en est la cause, que dans des suites de parties posées en lignes droites, ou dans des suites formées, comme de simples lignes droites ou comme des cylindres fort étroits : mais l'expérience & la nature de la chose même, font voir que ce mouvement se communique plutôt en tout sens, non-seulement en s'éloignant en droite ligne du corps sonore, mais encore en s'écartant, ou se répandant vers les côtés, en forme d'ondes sphériques ; & par conséquent, les suites des parties d'air doivent être regardées comme des especes de cônes, qui ont pour bases des portions de surfaces sphériques, & pour sommet le point, ou la partie même du corps sonore, dont les particules ont été ébranlées, ou agitées.

128. Il suit de là, que l'agitation, ou impression que les parties d'air en reçoivent, laquelle se propage ensuite en avant, doit toujours diminuer en

force, à mesure quelle s'éloigne du corps sonore dans la même proportion, mais inverse, que les ondes sphériques qu'elle forme, augmentent ; & par conséquent dans la proportion inverse des quarrés des distances de ces ondes au corps sonore.

129. D'où il suit encore, que la vîtesse du son subsiste toujours la même, sans aucune diminution, & à plus forte raison, sans aucune augmentation dans toutes ces ondes ; puisque les ondes les plus éloignées où l'impression se trouve le plus diminuée, sont précisément dans le même cas où auroient été les ondes les plus proches, si l'impression immédiate des particules du corps sonore avoit été affoiblie au même point, dans lesquelles cependant, (par le raisonnement du n°. 102.) la vîtesse du son seroit précisément la même que, lorsque ces ondes sont agitées beaucoup plus fortement.

ARTICLE XV.

130. Ce qui a été dit dans les n°s. 122. & 124. peut servir d'éclaircissement à une difficulté que l'on a faite

sur cette partie de la Théorie de M. *Newton*, dans laquelle il recherche quelle est la cause de l'excès de la vîtesse réelle du son, trouvée par les expériences sur la vîtesse calculée, ou déterminée *à priori*, par la Théorie. L'Auteur de cette difficulté semble supposer que M. *Newton* entend par les termes de *parties d'air solides*, des parties absolument éxemtes de pores. Or il démontre que le volume solide des parties d'air, réduites en un tel état qu'il n'y eût plus aucun vuide entre leurs plus petites particules, est beaucoup moindre, non-seulement que la 800ème, mais encore que la 15000ème partie de leur volume ordinaire ; & même que ce volume solide, & son diamêtre, sont peut-être incomparables en petitesse avec le volume ordinaire de ces parties, & avec leur diamêtre ordinaire, ou l'intervalle qui se trouve entre leur centre, dans l'état ordinaire : ce qu'il prouve évidemment par la comparaison de la quantité de matiere contenuë dans l'air, avec la quantité de matiere contenuë dans l'or, lequel, quoique 15000 fois plus dense, ne laisse pas d'avoir

ses pores assez larges, pour laisser passer la matiere subtile, ou l'éther. D'où il suit manifestement, que si la vîtesse calculée n'étoit augmentée que dans la proportion des intervalles entre les centres des parties d'air, dans leur état ordinaire, avec les diamètres de leurs volumes solides, cette augmentation ne mériteroit pas d'être considérée, bien loin d'aller jusques à la 8 ème partie de cette vîtesse ; ce qui fait juger à cet Auteur, que l'estimation de cette augmentation étoit purement arbitraire, & que M. *Newton* ne l'a posée égale à cette 8 me partie, que pour mieux accorder, (si on peut le dire,) son calcul avec l'expérience.

131. Si cet Auteur veut me permettre de faire quelques réflexions sur sa difficulté, je remarquerai 1°. que Mr. *Nevvton*, (dans l'endroit de son Livre, où il parle de cette cause d'augmentation, page 343. paragraphe 2.) compare les parties solides de l'air, ou les parties de l'air, réduites à leur volume solide, ou à leur plus petit volume, qu'il appelle leur grosseur, (*crassitudo*

situdo particularum Aëris,) il les compare, dis-je, avec les parties de l'eau, ou des sels dans leur état naturel, ou ordinaire, lesquelles il n'a sans doute jamais considérées comme parfaitement solides ; (en prenant ce terme dans le sens que l'Auteur lui donne, n°. 130.) ce qui fait voir qu'il n'a entendu dans cet endroit, autre chose par ce terme, que ce que l'on exprime ordinairement, par celui de dur, ou plûtôt d'*incompressible*, tel qu'il a été défini ci-devant, n°. 124.

132. 2°. Que les parties de l'air, réduites en un aussi petit volume que celui de leur 800ème partie, peuvent très-bien être supposées autant incompressibles, & (pour ainsi dire) aussi dures que celles de plusieurs corps sensibles, tels que l'eau, ou les sels, le bois &c : surtout, si l'on considere cette incompressibilité, par rapport à la petite force comprimante des particules des corps sonores; car cette force étant vraisemblablement moindre que celle des pressions nécessaires, pour retenir les parties d'air dans une aussi grande compression, l'effet qu'elle produiroit sur ces parties d'air, lorsque les parti-

cules du corps sonore se meuvent en avant, ainsi qu'il a été expliqué dans les n$_{os}$. 12.& 13. se borneroit uniquement à les pousser en avant, sans les comprimer en aucune maniere. D'où il suit, que si le son pouvoit être produit dans un air aussi condensé, ou dont les parties fussent devenues presque de la même nature que celles de l'eau (n°. 123.), il s'y propageroit sans aucune succession de temps, ou comme dit Mr. *Nevvton*, dans un instant jusques aux plus grandes distances.

133. 3°. Que c'est sans doute ce qui a porté M. *Nevvton* à supposer le volume (*crassitudo*) des parties de l'air devenues telles, égal à peu près à celui des parties de ces corps ausquelles il les compare, d'où il a conclu enfin que le rapport des intervalles de leurs centres dans leur état ordinaire, aux intervalles de leurs centres dans cet état de condensation (lesquels sont évidemment égaux à leurs diamêtres diminués) étoit le même que celui de la racine cube de la densité ordinaire de l'air, à la racine cube de la densité ordinaire de ces corps, avec celle de l'eau, par exemple; laquelle est envi-

ron 700. ou 800. fois plus dense que l'air, & par conséquent que ce rapport étoit à peu près celui de 1. à 9.

134. Enfin les raisons des n^{os}. précédens, jointes à celles des n°s. 122. 124. paroissent prouver que le fondement sur lequel Mr. *Nevvton* a déterminé l'augmentation de la vîtesse réelle du son, sur la vîtesse calculée, n'est pas absolument arbitraire, & que c'est moins pour accorder son calcul avec l'expérience, qu'il a supposé cette augmentation, égale environ à une huitiéme partie, que parce que cette supposition étoit effectivement très-vraisemblable.

ARTICLE XVI.

135. Enfin l'Auteur de la difficulté dont on vient de parler, cherchant une autre cause de cette augmentation, a pensé qu'elle venoit de la maniere dont le son se propageoit en augmentant d'étenduë, à mesure qu'il s'éloignoit de son origine, (comme il a été expliqué dans l'Article XIV.) ce qui devoit faire considerer les suites des parties d'air (qu'il nomme *rayons* ou

fibres sonores,) non comme des Cylindres d'une épaisseur uniforme dans toute leur longueur, mais comme des Cônes infiniment aigus, qui avoient leurs sommets dans un point commun de leur origine.

136. Il compare ensuite la vîtesse du son, dans ces deux especes différentes de raïons sonores, considérés, comme des Cylindres ou des Cônes, avec la vîtesse des vibrations de deux cordes de Musique, dont l'une seroit d'une même épaisseur dans toute sa longueur, & l'autre auroit une figure de double Cône fort pointu, dont le sommet commun fût au milieu; & supposant les deux cordes égales, en quantité de matiere, & en longueur aux fibres sonores, & les poids qui les tendent, égaux aux poids des petites colones d'air, dont a parlé dans le no. 112. il fait voir.

137. 1°. Que les vibrations longitudinales des deux fibres, doivent être *synchrones* avec les vibrations latitudinales des deux cordes, ou qu'il doit y avoir un même nombre de vibrations dans un tems donné pour les

fibres & pour les cordes de même espece.

138. 2°. Que les différentes vibrations de chaque fibre & de chaque corde, sont toutes *Tautochrones*, ce qui s'accorde avec ce qui a été dit ci-devant n°. 100. & d'où l'on peut par conséquent tirer les mêmes conséquences sur l'uniformité de la vîtesse du son, (n°. 10.) mais il ajoute ensuite,

139. 3°. Que les vibrations latitudinales de la corde uniforme, seront moins promptes que celles de la corde formée en double cône, & par conséquent que les vibrations longitudinales de la fibre sonore de cette seconde espece, seront plus promptes que celles de la fibre de la premiere espece ; d'où il conclut enfin.

140. 4°. Que la vîtesse du son dans le second cas, ou lorsque les fibres sonores sont considérées comme des cônes aigus, dont le sommet est placé à l'origine du son, doit être plus grande, que lorsque ces fibres sont considérées comme des Cylindres uniformes.

141. L'explication que cet Autêur donne du mouvement de l'air, dans

la propagation du son, sur laquelle est fondée la comparaison de ce mouvement avec celui des cordes de Musique, paroît assez différente de l'explication de Mr. *Nevvton*, pour que les raisonnemens ou les difficultés tirées de cette comparaison ne puissent pas avoir lieu dans la Théorie présente : car il suppose, (autant que je l'aï pû comprendre,) 1°. Que toutes les parties d'air, qui composent une même fibre sonore, ou une même suite, font un nombre innombrable de vibrations consécutives, par l'effet d'une seule impulsion des particules des corps sonores.

142. 2°. Que ces vibrations sont différentes pour les différentes parties de la fibre, celles du milieu de la fibre, faisant leurs vibrations beaucoup plus grandes que les parties qui sont aux extrémités.

143. 3°. Que toutes ces vibrations sont non seulement *Tautochrones*, mais encore 4°. *Synchrones* entr'elles, c'est-à-dire, commencent & finissent toutes ensemble dans un même instant.

144. 5°. Qu'une même suite comprime, & met en mouvement dès le

commencement de son agitation, les suites qui l'avoisinent par devant & par derriere, ensorte

145. 6°. Que les parties d'air qui composent ces seconds fibres, commencent & finissent leurs premieres vibrations en même temps, que les parties de la premiere fibre commencent & finissent leurs secondes vibrations, & de même que les parties de la troisiéme vibration commencent & finissent leurs premieres vibrations en même-temps, que les parties de la premiere fibre commencent & finissent leurs troisiémes vibrations, &c. d'où il suit

146. 7°. Qu'un très-grand nombre de différentes fibres consécutives sont agitées, & pour ainsi dire vibrantes toutes à la fois, & en même-temps.

147. 8°. Que pendant la durée de chacune des vibrations égales de la premiere fibre, le son parcourt la longueur d'une fibre entiere, & par conséquent, 9°. Que la vîtesse du son dépend uniquement de la vîtesse de ces vibrations, ou qu'elle est proportionelle à cette vîtesse, soit que les fibres soient

égales ou inégales en longueur, ce qu'il démontre.

148. 10°. En comparant les vibrations longitudinales décroissantes des parties d'air d'une même fibre, à les compter depuis le milieu de la fibre avec les vibrations latitudinales décroissantes des différens points d'une corde de musique de même longueur, &c. (no. 135.) à compter ces points depuis le milieu de la corde, & il trouve.

149. 11°. Qu'en supposant toutes ces vibrations *tautochrones* & *synchrones* entr'elles, comme elles doivent être, les vibrations longitudinales des parties d'air qui composent la fibre sonore, sont précisément égales en longueur & en durée aux vibrations latitudinales des parties correspondantes de la corde; d'où il tire enfin, 12°. les conséquences des nos. 139. & 140.

150. Mais on a vû dans la Théorie précédente, que M. *Newton* suppose, 1°. Que toutes les parties d'air de toutes les suites, ne font chacune que deux vibrations; ce qui est évident par le n°. 44. comparé au n°. 43. 2°. Que toutes ces vibrations sont *tautochrones*,

(n°. 101.) 3°. Qu'elles sont à peu près égales pour toutes les parties d'une même suite ; & 4°. Qu'elles se font successivement, chaque partie étant toujours plus ou moins avancée dans son petit espace, à proportion qu'elle se trouve plus ou moins éloignée de l'extrémité précédente ou antérieure de la fibre. Enfin, 5°. Qu'il n'y a jamais que quatre suites différentes, (lesquelles composent une seule onde) qui soient agitées ensemble & en même tems, ou dont les parties se trouvent dans l'état extraordinaire, qui sert à la Propagation du Son.

Cette derniere supposition jointe à la premiere, semble plus propre à rendre raison pourquoi cet état de l'air, & le son qui en est produit, ne durent précisément que le tems de l'agitation même des corps sonores.

151. Il paroît par le n°. précédent, que la comparaison des vibrations des cordes de musique, avec les vibrations des parties d'air, non plus que celle de la vîtesse de ces cordes, avec la vîtesse du son, les raisonnemens & les conséquences que l'Auteur en a tirées, (n°s. 139. & 140.) ne peuvent nulle-

ment s'appliquer à cette Théorie, comme il a été dit, (n°. 141.) & qu'il étoit par conséquent nécessaire d'y rechercher une autre cause de l'augmentation de la vîtesse réelle du son, telle que celle qui a été expliquée dans l'Article XIII.

ADDITION.

1. M. *Nevvton*, a donné dans la Proposition 40. du II. Livre de ses Principes, une regle ou formule, pour trouver ou calculer arithmétiquement le mouvement des corps, qui se meuvent dans des milieux qui leur résistent, & pour pouvoir ensuite comparer les calculs qui résultent de sa Théorie de la résistance des milieux, avec les expériences. Mais il a entierement omis la démonstration de cette regle, en se contentant de dire qu'elle étoit évidente, par la Prop. 9. & ses Corollaires du même Livre. Je donnerai ici cette Démonstration, telle que je crois l'avoir trouvée par un calcul assez long, fondé non-seulement sur ces deux Propositions, 9. & 40. mais encore sur quelques propriétés de l'hy-

perbole & des logarithmes, lesquelles j'exposerai d'abord simplement en forme de *Lemme*, de même que ces deux Propositions, du Livre de M. *Nevvton*.

LEMME I.

Soit *A* le poids absolu d'un Globe, ou d'une Sphere dans le vuide, B son poids relatif dans le milieu résistant, *D* son diamêtre, *F* un espace qui soit à $\frac{4}{3}$ *D*, comme la densité du Globe à celle du milieu, c'est-à-dire, comme *A* est à *A* — B, *G* le tems employé par ce Globe à décrire l'espace *F*, en tombant dans le vuide, par la force de son poids relatif B, & *H* la vîtesse que ce Globe acquiert par cette chûte : cette même vîtesse *H* sera la plus grande vîtesse que ce Globe puisse jamais acquérir en tombant dans le milieu résistant, par la force de son même poids relatif B. *Ce Lemme est démontré dans le Coroll.* 2. *de la Proposition* 38. *du Liv.* 2.

LEMME II.

La résistance que ce globe, tombant ou descendant dans le milieu

avec cette vîteſſe *H*, éprouve & ſurmonte continuellement par la force de ſon poids relatif B, eſt par là même préciſément égale à la force de ce poids relatif *B*, de maniere, que ſi dès le premier moment de ſa chûte dans le milieu, il commence à y deſcendre avec cette vîteſſe *H*, il la conſervera toute entiere, pendant tout le tems de ſa chûte, mais s'il y deſcend avec une autre vîteſſe quelconque, plus grande ou plus petite, la réſiſtance qu'il éprouvera, ſera à la force de ce poids relatif *B*, comme le quarré de cette derniere vîteſſe, au quarré de la vîteſſe *H*.

L E M M E III.

Soient, 1°. *CA*, *BAD*, (*fig.* 73.) deux lignes droites, qui ſe coupent à angles droits au point *A*, & ſur leſquelles on ait pris *AC*, = *AD*, & *AB*, = $\frac{1}{4}$ *AD*, = $\frac{1}{4}$ *AC*. 2°. *AC* une autre droite, paſſant par les points *A* & *C*, & faiſant avec les lignes *DAB*, *CA*, deux angles égaux, *CDA*, *ACD*, chacun de 45°. 3°. ſoient décrites deux hyperboles équilateres, dont l'une

VTA, passant par le point *A*, ait pour asymptote la droite *DC*, & pout axe, la droite *DAB*, & l'autre hyperbole *BM* passe par le point *B*, & ait pour asymptotes les droites *CH*, *Cg*; si du point *D*, on tire une ligne droite *DPT*, qui coupe la droite *CA*, en *P*, & l'hyperbole *AV*, en *T*, de maniere que l'aire du secteur *DAT* de cette hyperbole, soit à l'aire du triangle rectangle *DAC*, comme un tems quelconque *P*, pendant lequel on suppose que le Globe s'est mû en descendant dans le milieu, par la force de son poids relatif *B*, au tems *G*, (*Lem. I.*) Il est démontré dans le Corollaire 6. de la Proposition 9. du second Livre des Principes, que la ligne *AP*, sera à la ligne *AC*, en même proportion que la vîtesse acquise par le Globe, en tombant dans le milieu, pendant le tems *P*, est à la plus grande vîtesse *H*. *Ce Lemme & le suivant se trouvent démontrés dans les Corollaires de la Prop. 9. du II. Livre, & principalement dans le Corollaire 6.*

LEMME IV.

Si l'on prend de plus, la ligne *A K*, troisiéme proportionnelle géométrique aux lignes *A C*, & *AP*, en sorte que ∺ *AC*, *AP*, *AK*, & qu'au point *K*, on éleve sur *CA*, une perpendiculaire *K N*, laquelle coupe l'hyperbole *B* ΛΛ en *N*; il est encore démontré dans le même Corollaire 6. que l'aire *ABNK* de cette hyperbole *B* ΛΛ sera au Secteur *DAT* de l'autre hyperbole *A T V*, comme l'espace parcouru par le Globe, en descendant dans le milieu résistant pendant le tems *P*, est à l'espace que ce même Globe auroit parcouru dans le même tems *P*, avec sa plus grande vîtesse *H*, s'il s'étoit mû uniformement.

LEMME V.

Si l'on appelle *t*, la tangente d'un angle quelconque, moindre 45°. & *r* le rayon, la tangente du complément de cet angle à celui de 45°. sera $= \frac{rr - rt}{r + t}$.

DEMONSTRATION.

Soit AE, (*fig.* 74.) un arc, ou ACE un angle de 45°. dont la tangente AG, est égale au rayon CA, (r) & la sécante $CG = r\sqrt{2}$, AC, un arc, ou ACB, un angle moindre, dont la tangente est $AD = t$, & BCE, complément de ACB, à 45°. dont la tangente EF est perpendiculaire sur CG, du point D qu'on tire DH, parallele à EF, ou perpendiculaire sur CG. 1°. Les triangles semblables CGA, GHD, donnent cette proportion CG : CA ou AG : : GD. GH ou HD, c'est-à-dire, $r\sqrt{2}.r :: r - t.\ HG = HD$ $\frac{r-t}{\sqrt{2}}$. 2°. On aura donc CG 2 CG — GH 2 $r\sqrt{2} - \frac{r-t}{\sqrt{2}} = \frac{2r - r + t}{\sqrt{2}}$ $= \frac{r+t}{\sqrt{2}}$ 3°. Les triangles CHD, CEF semblables, donnent enfin cette proportion CH $\left(\frac{r+t}{\sqrt{2}}\right)$ HF $\left(\frac{r-t}{\sqrt{2}}\right)$: : CE (r). $EF = \frac{rr - rt}{r+t}$ c. q. f. d.

LEMME VI.

Si des points *T* & *A*, (*figure* 73.) on abaisse sur *CD* les perpendiculaires *Tt*, *Aa*, desquelles la derniere *Aa*, coupe la ligne *TD* en *X*, on aura par la propriété de l'hyperbole, (qui donne $Tt \times tD = Aa \times aD$.) l'aire du triangle rectangle, *TtD*, égale à celle du triangle rectangle *AaD*, & par conséquent, (en retranchant de part & d'autre l'aire du triangle rectangle *XaD*) l'aire du trapeze *TtaX* égale à celle du triangle obliquangle *AXD*, & par conséquent encore, (en ajoûtant à chacun des deux le triligne *TXA*) l'aire hyperbolique *TtaA*, égale au secteur *TDA* : mais ce secteur *TDA*, est au triangle rectangle *CAD*, comme *P* est à *G* ; d'où il suit que l'aire hyperbolique $TtaA =$ au secteur $TDA =$ au triangle $CAD \times \frac{P}{G} =$ (en supposant que la ligne *aA* ou *aD*, réprésenté l'unité,) $1 \times \frac{P}{G} = \frac{P}{G}$.

ARTICLE

LEMME VII.

C'est une propriété connuë de l'hyperbole, que si les abscisses tD, ou CA prises sur une asymptote CD, ou CB, réprésentent tous les nombres naturels, depuis l'unité réprésentée par les lignes aD, ou Cg, les espaces ou aires hyperboliques $TtaA$, cg AB, réprésenteront les logarithmes de ces nombres.

Mais il faut remarquer 1°. que les espaces de l'hyperbole ATV, sont doubles des espaces correspondans de l'hyperbole BNM, lorsque leurs abscisses réprésentent les mêmes nombres, & sont par conséquent proportionnelles aux lignes Aa, & Cg, lesquelles réprésentent l'unité, pour l'une & l'autre hyperbole; cela se peut démontrer ensuite de cette propriété des hyperboles équilateres; sçavoir, *que leurs espaces asymptotiques correspondans, sont proportionnels aux aires des triangles rectangles* ADa *&* Cgc.

Or, on a 1°. $aD . AD :: aC . AC :: I . \sqrt{2}$, & de plus, $AC = 2Cg$, & par conséquent, 2°. $aD . 2Cg :: I . \sqrt{2}$, &

aD. *Cg* : : $\sqrt{2}$. *1*. On prouvera de même que *Aa*. *cg* : : $\sqrt{2}$. 1. D'où il suit, que le triangle rectangle *ADa* est double du triangle rectangle *cgC*, & par consequent, que les aires de l'hyperbole *ATV* sont doubles de celles de l'hyperbole B*NM*, lorsque les abscisses de ces hyperboles, sont proportionnelles aux lignes, *aD*, *Cg*.

LEMME VIII.

C'est une propriété connuë des logarithmes, & par conséquent, des aires hyperboliques que leurs différences arithmétiques sont proportionnelles aux rapports géométriques des nombres naturels, ou que les différences des aires hyperboliques, sont proportionnelles aux rapports des abscisses correspondantes : d'où il suit, & du Lemme précédent, que les différences des aires de l'hyperbole *BNM*, qui sont proportionnelles aux rapports géométriques des abscisses correspondantes, sont deux fois plus petites que les différences des aires de l'hyperbole *ATV*, lorsque ces aïres

répondant à des abscisses de cette hyperbole, qui ont entr'elles le même rapport, que les abscisses de l'hyperbole B*NM*; Il suit de là, que si les logarithmes hyperboliques de deux nombres quelconques, *H* & *N* sont exprimés par, $l\,(M)$ & $l\,(N)$, on aura $l\,(\frac{M}{N}) = l(M) - l(N)$, & $l\,(MN) = l(M) + l\,(N)$.

Lemme IX.

Il est encore connu des Géométres, que les logarithmes, qui expriment les aires des hyperboles équilateres, comme l'hyperbole *ATV* ou B*NM*, sont aux logarithmes ordinaires, marqués dans la table, comme le nombre 2302. 585. 093, au nombre 1000 000 000, & réciproquement que ces logarithmes ordinaires, sont aux logarithmes hyperboliques, comme les nombres 0434294481 9, au nombre 10000000000; d'où il suit, que le logarithme ordinaire d'un nombre quelconque *N*, étant exprimés par $L\,(N)$ & le logarithme hyperbolique du même nombre, par $l\,(N)$, on aura $l\,(N)$

$= \frac{2,302585093 \times L(N)}{1000000000}$, & $L(N) =$ $\frac{04342944819 \times l(N)}{10000000000}$ ou (comme M. *Nevvton* les marque) $=$ $0,4342944819 \times l(N)$.

LEMME X.

Enfin, il est démontré que le logarithme ordinaire hyperbolique d'un nombre, est la moitié du logarithme de son quarré, & en même tems double du logarithme de sa racine, & que le logarithme hyperbolique du nombre 2, ou $l(2) = 0693 1471805$.

REGLE OU FORMULE

D'une Sphere, ou d'un Globe dans un milieu résistant.

LEMME XI.

Que le Globe dont on a parlé dans les Lemmes précédens, descende dans le milieu ou fluide résistant, par la force de son poids relatif B, (Lemme I.)

Soit, (Lemme 3.) P, le tems de sa chûte déterminé en minutes secondes, si le tems G (Lem. I.) est déterminé de même; cherchez, 1°. un nombre absolu N, qui réponde au logarithme ordinaire, $0,4342944819 \times \frac{2P}{G}$. 2°. Soit L, le logarithme ordinaire du nombre $\frac{N+1}{N}$.

R E G L E I.

La vîtesse du Globe acquise par sa chûte dans le fluide, sera $= \frac{N-1}{N+1}, H$

II. La hauteur décrite $= \frac{2PF}{G} - 1, 3862943611\, F + 4,605170186\, L\, F$.

III. Si le fluide est assez profond, (pour que le tems P de la chûte dans le fluide, soit beaucoup plus long que le tems G) on peut négliger le dernier terme $4,605170186\, L\, F$, & la hauteur décrite sera très-approchamment $= \frac{2PF}{G} - 1,3862943611\, F$.

DEMONSTRATION

De la premiere Partie de la Regle.

1°. Supposez comme dans le Lemme 3. que l'aire du triangle rectangle *CAD* représente le tems *G*, ou soit $=$ *G*, & que la ligne *AC* soit $= H$. On aura par le Lemme 6. l'aire hyperbolique $TtaA = \frac{P}{G}$. Or, cette aire exprime, (Lemme 7.) le logarithme hyperbolique du nombre représenté par la ligne *t D*, (en supposant toujours comme ci-devant, que la ligne *aD* représente l'unité,) & par conséquent, ce nombre *t D* doit répondre à un logarithme hyperbolique $= \frac{P}{G}$, ou (Lemme 8.) à un logarithme ordinaire $= 0,4342944819 \times \frac{P}{G}$. Si l'on double ce logarithme ordinaire, on aura, (Lemme 10.) le logarithme ordinaire du quarré de ce nombre $= 0,4342944819 \times \frac{2P}{G}$, $=$ (Lemme 11.) au logarithme ordinaire du nombre

N; d'où il suit, (Lem. 10.) que ce nombre N est égal au quarré du nombre réprésenté par tD, ou que la ligne $tD = \sqrt{N}$.

2°. On a encore par la propriété de l'hyperbole $aD \times aA$; $(1 \times 1) = tD \times tT = \sqrt{N} \times tT$, & par conséquent, $tT = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

3. Si l'on fait cette analogie, tD. tT : : le rayon (r) est à la tangente de l'angle tDT, on aura cette tangente $= \frac{r \times tT}{tD} = \frac{r}{N}$. On trouvera de même la tangente de l'angle TDA ou $PDA = \frac{r \times PA}{AD} = \frac{r \times PA}{H}$. Mais puisque l'angle tDA est de 45°. on aura encore, (Lem. 5.) cette même tangente de l'angle $TDA = \frac{r \times r - \frac{r}{N}}{r + \frac{r}{N}}$

$$= \frac{r \times \frac{Nr - r}{N}}{\frac{Nr + r}{N}} = \frac{N - 1}{N + 1}, \times r = \frac{r \times PA}{H}$$

d'où l'on tire $\frac{PA}{H} = \frac{N - 1}{N + 1}$; & par

conséquent, $PA = \frac{N-1}{N+1}, \times H$; Or, cette ligne PA représente, (Lem. 4.) la vîtesse du Globe acquise par sa chûte dans le fluide; d'où il suit que cette vîtesse sera $= \frac{N-1}{N+1} H$. *c. q. f. premierement démontrer.*

COROLLAIRES

De cette Démonstration.

1. Il est clair, par l'art. premier de cette Démonstration, que l'aire $Tt\,a\,A$ est égale au logarithme hyperbolique du nombre $\sqrt{N}$, ou $= l(\sqrt{N})$, & que le logarithme hyperbolique du nombre N est $= \frac{2P}{G}$, que $l\,(N) = \frac{2P}{G}$.

2. Puisque AC étant $= H$, AP est $= \frac{N-1}{N+1}, H$, & que, (Lem. 3.) $AK = \frac{AP^2}{AC} = \frac{\overline{N-1}^2 \times HH}{\overline{N+1}^2 \times H} = \frac{\overline{NN+1-2N} \times H}{NN+1-2N}$ On aura $CK = AC -$

$$AK = H - \frac{\overline{NN+1}\ 2N}{\overline{NN+1+2N} \times -H \frac{4N}{\overline{N \times 1}^{2}}}.$$

III. L'aire *ABNK*, représente, (Lemme 8.) le logarithme hyperbolique du rapport des deux lignes *AC*, & *CK*, ou de la fraction $\frac{AC}{CK} = \frac{H}{\frac{4N}{\overline{N+1}^{2}} H} = \frac{\overline{N+1}^{2}}{4N}$.

Mais ce logarithme étant pris dans l'hyperbole B*NM*, est deux fois plus petit que le logarithme correspondant, pris dans l'hyperbole *ATV*, dont la ligne *aD* représente l'unité. Ainsi cette aire *ABNK*, sera égale à la moitié du logarithme hyperbolique de la fraction $\frac{\overline{N+1}^{2}}{4N}$, ou, (Lem. 10.) = au logarithme hyperbolique de la fraction $\frac{N+1}{2\sqrt{N}} = l\left(\frac{N+1}{2\sqrt{N}}\right)$

DEMONSTRATION

De la seconde Partie.

Puisque le globe a parcouru, (Lem: 1.) pendant le tems *G*, en descendant avec accélération, par la force de son poids relatif B, l'espace *F.* il s'ensuit que pendant le même tems *G*, il parcourra en se mouvant uniformément avec la vîtesse *H* (acquise par sa chûte,) un espace $= 2F$, & pendant le tems *P*, avec cette même vîtesse uniforme *H*, un espace $= \frac{2FP}{G}$.

Or, cet espace $= \frac{2FP}{G}$ est à l'espace que ce Globe décrit dans le milieu résistant, en descendant pendant le même tems *P*, (Lemme 4.) comme le secteur *TDA*, à l'aire *A*B*NK*, ou, (Coroll. 1. & 3.) :: $l(\sqrt{N}] : l(\frac{N+1}{2\sqrt{N}})$.

La difference de cet espace à l'espace $\frac{2FP}{G}$, est égale à la difference du secteur *TDA*, & de l'aire *A*B*NK*,

ou à la différence des logarithmes hyperboliques, $l(\sqrt{N})$, & $l\left(\frac{N+}{2\sqrt{N}}\right)$ ou (Lem. 8.) égale au logarithme hyperbolique de la fraction $\frac{\sqrt{N}}{\frac{N+1}{2\sqrt{N}}}$ ou enfin

$= l\left(\frac{2N}{N+1}\right.$.

On aura donc cette proportion, l'espace $\frac{2FP}{G}$, est à la différence de cet espace, à l'espace décrit dans le fluide, comme $l(\sqrt{N})$ à $l\left(\frac{2N}{N+1}\right)$, comme, (Lem. 8.) $l(\sqrt{N})$ à $l(2N) - l(N+1) :: 1. \frac{l(2N) - l(N+1)}{l(\sqrt{N})} :: 1.$

$\frac{2l(2N) - 2l(N+1)}{2l(\sqrt{N})} :: 1.$

$\frac{2l(2N) - 2l(N+1)}{l(N)} :: 1.$

$\frac{2l(N) + 2l(2) - 2l(N+1)}{l(N)} :: 1.$

$\frac{2l(2) - 2l\left(\frac{N+1}{N}\right)}{l(N)} :: 1. \ 2 \times$

$\frac{l(2) - l\left(\frac{N+1}{N}\right)}{l(N)}$.

Or, 1°. le logarithme hyperbolique de $2 = l(2) =$ (Lem. 10.) $0,6931471805$, 2°. $l(N) =$ (Coroll. 1.) $\frac{2P}{G}$, & 3°. $l\left(\frac{N+1}{N}\right) =$ (Lem. 9. & 11.) $2,302585093 \times L$. on aura donc encore l'espace $\frac{2FP}{G}$, à la différence de cet espace, à l'espace décrit dans le fluide, ou à l'excès de ce premier espace sur le dernier :: 1. 2. $\times \frac{0,6931471805 - 2,302585093 \times L}{\frac{2P}{G}}$ :: 1. $\frac{0,6931471805 \times G - 2,302585093 \times L \times G}{P}$

On trouvera donc, enfin par la régle de trois, la différence de ces deux espaces $= \frac{0,6931471805 \times G - 2,302585093 \times L \times G}{P} \times \frac{2FP}{G}$, $= 1,386294361 \times F - 4,605170186 \times L \times F$: & si l'on retranche cette différence de l'espace $\frac{2FP}{G}$. on aura l'espace décrit par le Globe dans le milieu résistant $=$

$\frac{2FP}{G} - 1,3862943611 \times F - 4,605170186 \times L \times F$ c. q. f. *en second lieu démontrer.*

DEMONSTRATION.

De la troisiéme Partie.

Lorsque le fluide est fort profond, ou la chûte du Globe fort longue, il arrive, (comme il a été dit ci-devant,) que le tems P est fort grand en comparaison du tems G, & par conséquent, que le logarithme ordinaire $0,4342944819 \times \frac{2P}{G}$ est un fort grand logarithme, & que le nombre N qui lui répond, est un fort grand nombre: d'où il suit que le nombre $\frac{N+1}{N}$ différe peu de l'unité, & que son logarithme ordinaire L, est au contraire fort petit, & par conséquent enfin, que le troisiéme terme $-4,605170186 \times L \times F$ de la valeur précédente, étant multiplié par ce petit logarithme L, peut être, sans erreur sensible, négligé en comparaison des deux autres, c. q. f *en troisiéme lieu démontrer.*

ADDITIONS ET CORRECTIONS.

Le Lecteur eſt inſtamment prié de corriger & de ſuppléer, avant que de lire l'Ouvrage les fautes & les omiſſions ci-deſſous marquées, cela étant abſolument néceſſaire, pour l'intelligence de quelques raiſonnemens Phyſiques & de quelques démonſtrations Algébriques.

Pag. 12. *A la fin du paragraphe* 30. *Ajoutés:* On trouvera dans le premier Tome des *Mem. de l'Acad. Imp. de Peterſbourg*, une démonſtration de la compoſition & réſolution des mouvemens & des forces; par M. (*Daniel*) *Bernoulli*, laquelle paroît plus analogue à la nature des forces & des équilibres, & plus rigoureuſe qu'aucune qu'on ait jamais donnée, & ne ſuppoſant d'ailleurs aucun principe de Mécanique ou de Phyſique étranger, ou antérieur à cette queſtion.

P. 144. *Ligne derniere*, *r r*, *liſ.* *VV*.

Pag. 149. *Lig.* 12. $\frac{\text{x l x l H}}{\text{15 pieds}}$ *liſ.* $\frac{1 \times 1 \times H}{\text{15 pieds}}$

Pag. 163 *Ligne* 16. 1138. *liſ.* 1338.

Pag. 168. *Lig.* 9. $\frac{2y^7}{1\ 3.5.6.}$ *liſ.* $\frac{2y^7}{1.2.3.7.}$

Pag. 169. *Lig.* 3. $\times \frac{1}{2} 2y + \frac{2y^3}{1.2.5} + \frac{2y^5}{M} +$
&c. *liſés* $\times \frac{1}{2} \times$ $\overline{\ y \qquad 1.2.5\ }$

$\frac{2y^3}{}$ $\frac{2y}{}$ &c. $=$

$2y \times \quad 3. \quad + 1.2.5. +$

$$\sqrt{\frac{MA}{m \times 15 \text{ pieds}}} \times + \frac{v^3}{3} - \frac{v^5}{1.2.5.}$$
$+$ &c.

Pag. 172. *Lig.* 8. $\sqrt{\frac{F}{(L)x}}$ *lis.* $\frac{F}{\sqrt{(L)x}}$

Pag. 172. Lig. *dern.* ou (n° 245) *lisés* ou (n°s 226. & 245.) $= \frac{2l}{V} = \frac{2FA}{V}$

Pag. 180. *&* 181. *au lieu Coefficiens numeriques des séries de ces deux pages marqués* $\frac{1}{2.4}, \frac{1.3}{2.4.6.}, \frac{1.3.5}{2.4.6.8.}$ &c. $V \infty \times \frac{1}{\infty\, 1 + \text{ou } 2 -}$ *lisés ceux-ci.* $\frac{1.3}{2.4}, \frac{1.3.5}{2.4.6}, \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$, &c. $V \infty \times \frac{1}{\infty\, 1 + \text{ou } 2 -}$

Pag. 181. *Lig.* 11. ——— $V \infty \times$ *lisés* $\frac{V\infty}{\infty} \times \overline{x - 1}$

Pag. 179. Lig. *antépenult.* $\frac{2v^{200}}{1.2 \ldots \infty = 1\,\infty}$ *lisés* $\frac{2v^{2\infty}}{1.2.3 \ldots \infty.2\,\infty}$

Pag. 185. Lig. *dern.* $(SS + 2S)^{\frac{1}{2}}$ *lis.* $(ss + 2s)^{\frac{1}{2}}$

Pag. 196. *Lig.* 14. $\frac{1.2.5}{2.4.6.8.49.z^7}$ *lisez* $\frac{1.3.5}{2.4.6.8.59.z^7}$

Pag. 198. *Lig.* 3. $\dfrac{2.\,3.\,5.}{2.\,4.\,6.\,8.\,343.}$

lisés $\dfrac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6.\,8.\,343}$

Pag. 201. *Lig. dern.* $\left(\dfrac{1}{z-(-zz\,1)}\right)^{\frac{1}{2}}$

lisés $L\left(\dfrac{1}{z-(zz-1)}\right)^{\frac{1}{2}}$

Pag. 205. *Lig.* 11. *Après ces mots* Philosophie Naturelle. *Ajoutés*, & même de ceux que M. *s'Gravesande* a donné depuis dans le premier Tome de ses *Physices Elementa Mathematica*, *Lib. II. Cap. ultimo.* Comme ces Ouvrages ne peuvent qu'être très-connus de tous ceux qui ont quelque goût pour la Physique moderne ; il m'a paru inutile d'en citer en détail les en droits particuliers, qui avoient le plus de rapport à ceux de cet essai.

Pag. 217. *Lig.* 6 & *Pag.* 221 *Lig.* 15. B, *lisez* B *l*, —

Pag. 234. *Lig.* 5. trouve la, *lisés* trouvoit la plus comprimée, lorsque *n*'toit dans l'état naturel jusques, &c.

Ibid. *Lig.* 12. donné, *lisés* auquel elle se trouve à son tour la plus comprimée.

Ibid *Lig.* 21. *lisés.* *N*, *lisés* *n*.

Pag. 243. *Lig.* 6. *Après ces mots*, cette premiere, *Ajoutés* M. *s'Gravesande* a suivi aussi la même méthode Synthetique, en y

ajoutant de plus une construction Géométrique que l'on verra cy-après dans l'Art. VII. n°s 84. & suivans.

Pag. 30. *Lig.* 16. & 17.

$CG\ 2\ CG - GH\ 2\ r\sqrt{2} - \frac{r-t}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{} - \sqrt{} + t}{\sqrt{2}}$

lisés $CH = CG - GH = r\sqrt{2} - \frac{r-t}{\sqrt{2}} = \frac{2r - r + t}{\sqrt{2}}$

Pag. 305. *Ligne* 20. *Au lieu de* $\left(\frac{\sqrt{} + t}{\sqrt{2}}\right)$,

lisés $\left(\frac{r+t}{\sqrt{2}}\right)$

Pag. 258. *Lig.* 20. $\frac{4BE x 2ax}{2ax}$

lisés $\frac{4BE - 2ax}{2ax}$

Pag. 295. *Lig.* 11. vibration, *lisés* fibre;

Planche 1.

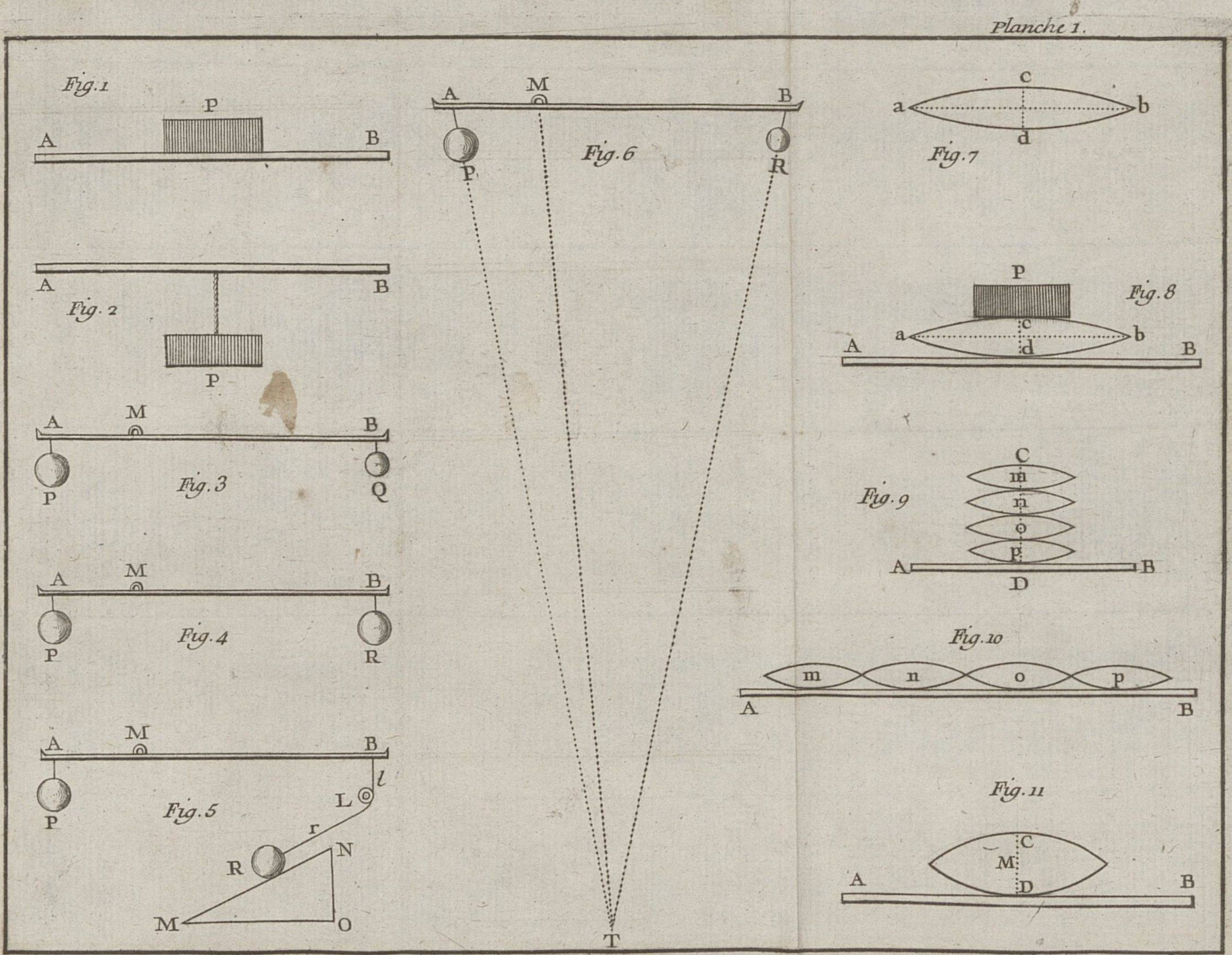


Fig. 1
P
A
B
A
B
Fig. 2
P
A
M
B
P
Q
Fig. 3
A
M
B
P
R
Fig. 4
A
M
B
P
l
L
Fig. 5
r
N
R
M
O
A
M
B
P
Fig. 6
R
T
c
a
b
d
Fig. 7
P
Fig. 8
c
a
b
A
d
B
C
m
Fig. 9
n
o
p
A
B
D
Fig. 10
m
n
o
p
A
B
Fig. 11
C
M
A
D
B

Planche 2.

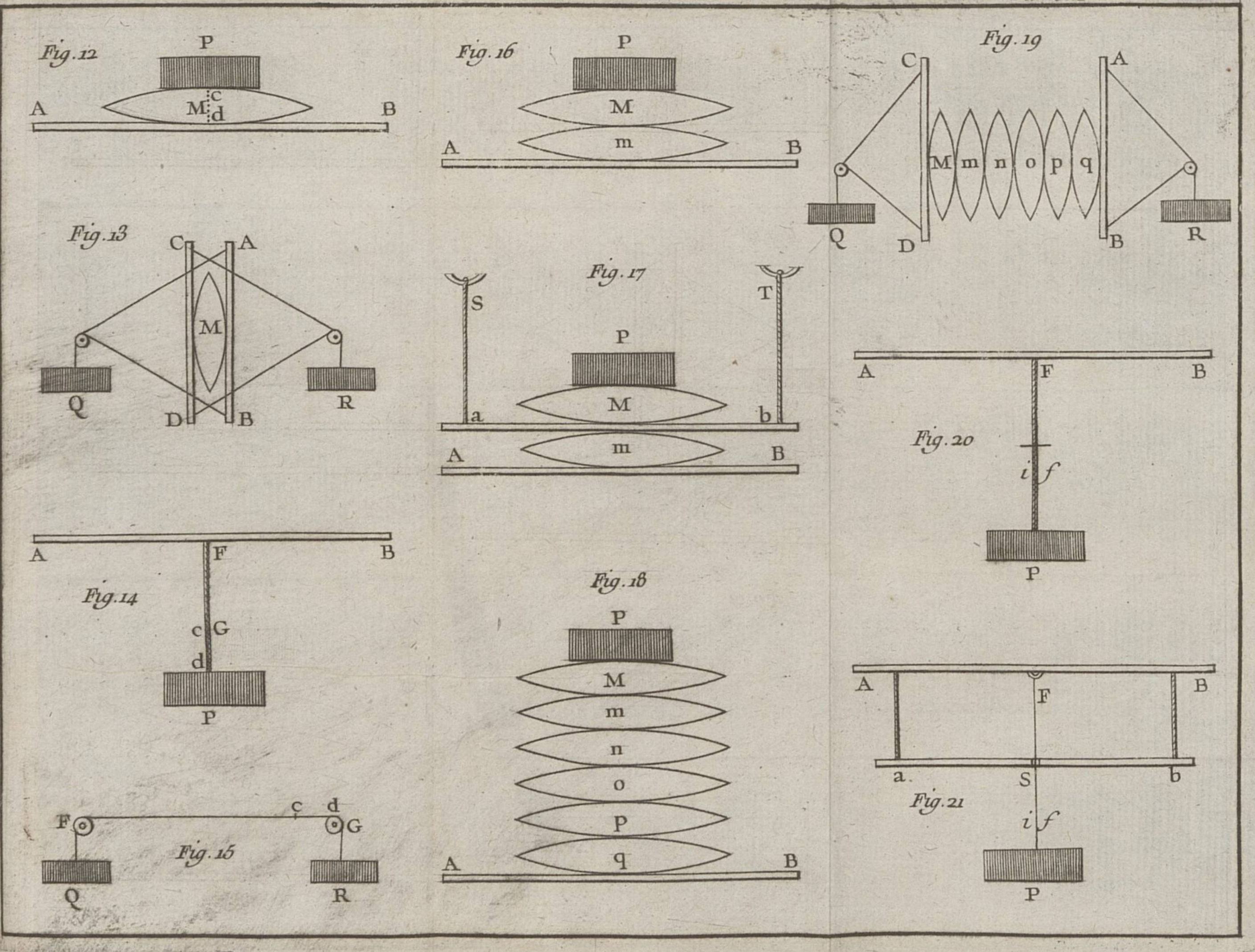
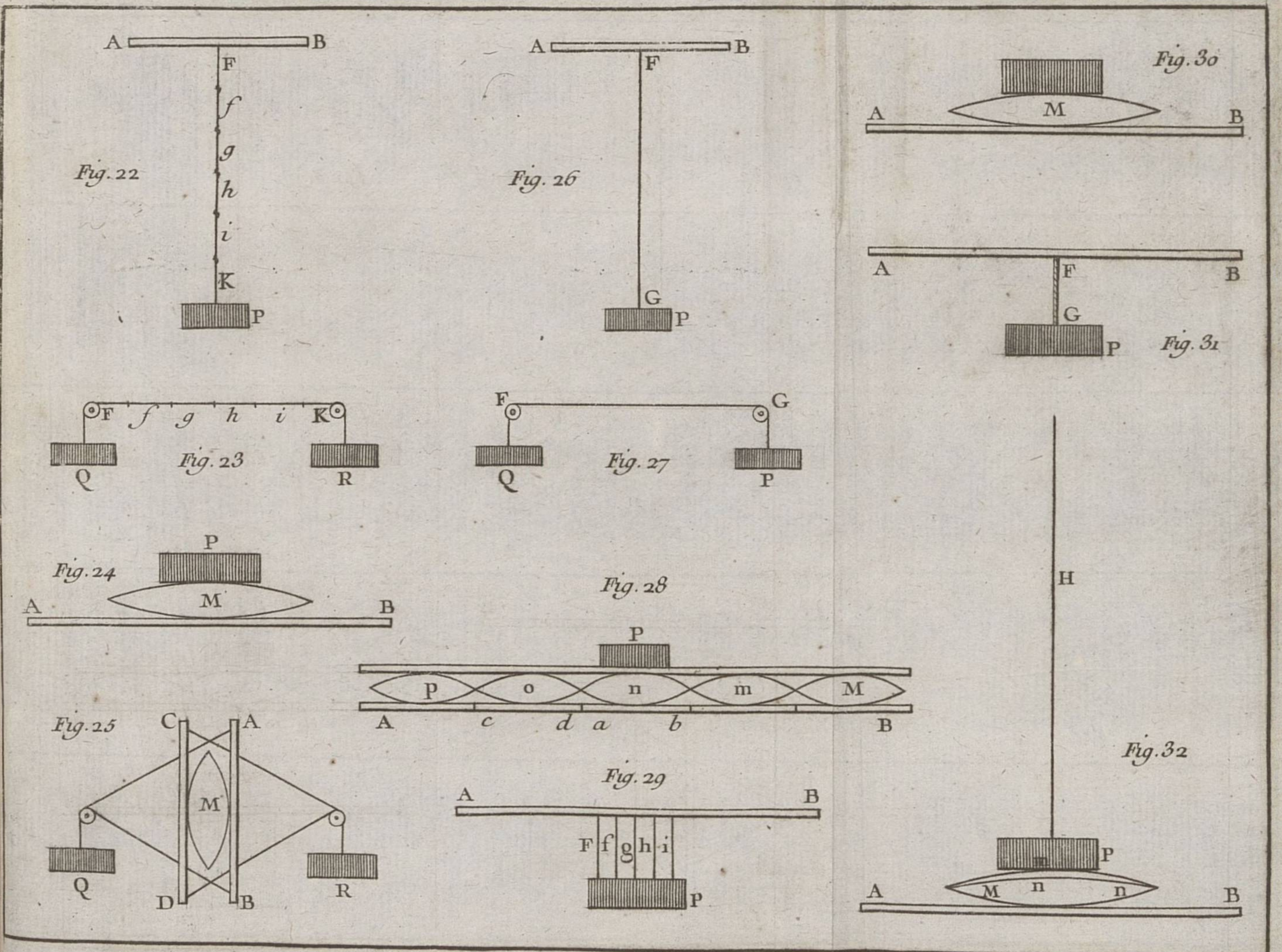


Fig. 12
P
A
M
c
d
B
Fig. 16
P
M
m
A
B
Fig. 19
C
A
M m n o p q
Q
D
B
R
Fig. 13
C
A
M
Q
R
D
B
Fig. 17
S
T
P
M
a
b
m
A
B
A
F
B
Fig. 20
i f
P
A
F
B
Fig. 14
c G
d
P
Fig. 18
P
M
m
n
o
p
q
A
B
A
F
B
a.
S
b
Fig. 21
i f
P
F
c
d
G
Fig. 15
Q
R


Fig. 22
A B F f g h i K P
Fig. 23
F f g h i K Q R
Fig. 24
P M A B
Fig. 25
C A M Q R D B
Fig. 26
A B F G P
Fig. 27
F G Q P
Fig. 28
P p o n m M A c d a b B
Fig. 29
A B F f g h i P
Fig. 30
M A B
Fig. 31
A B F G P
Fig. 32
H P A M n n B

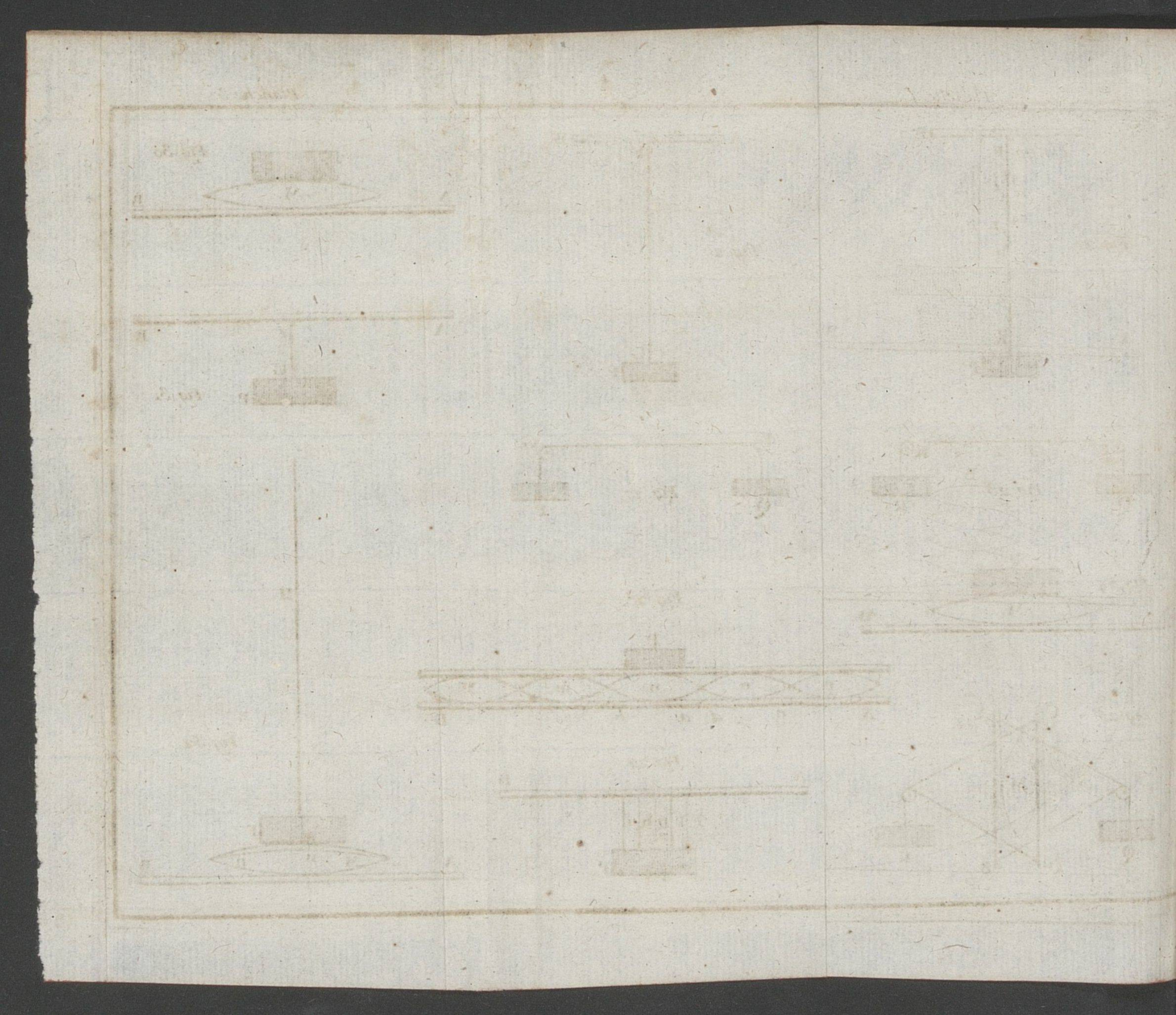
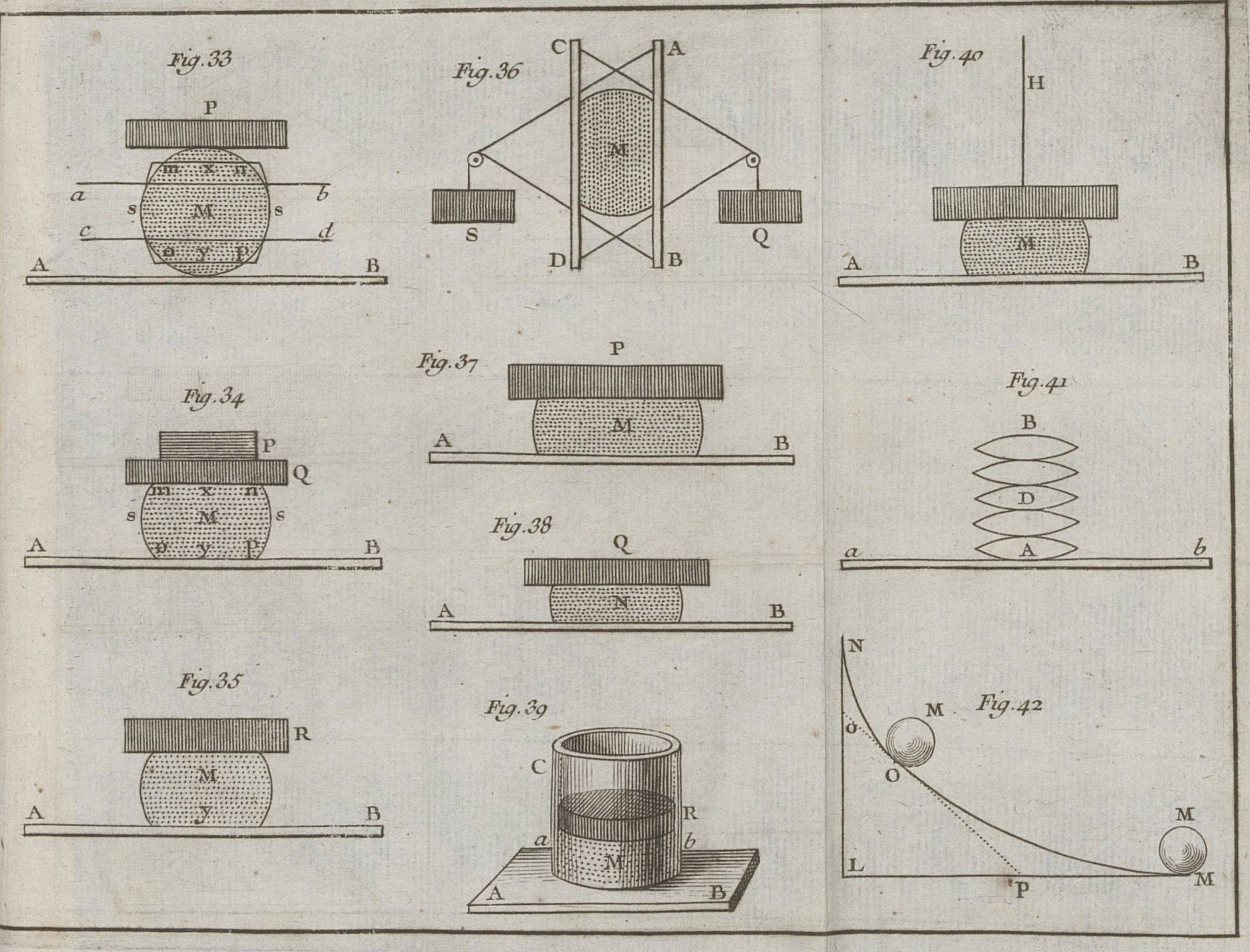
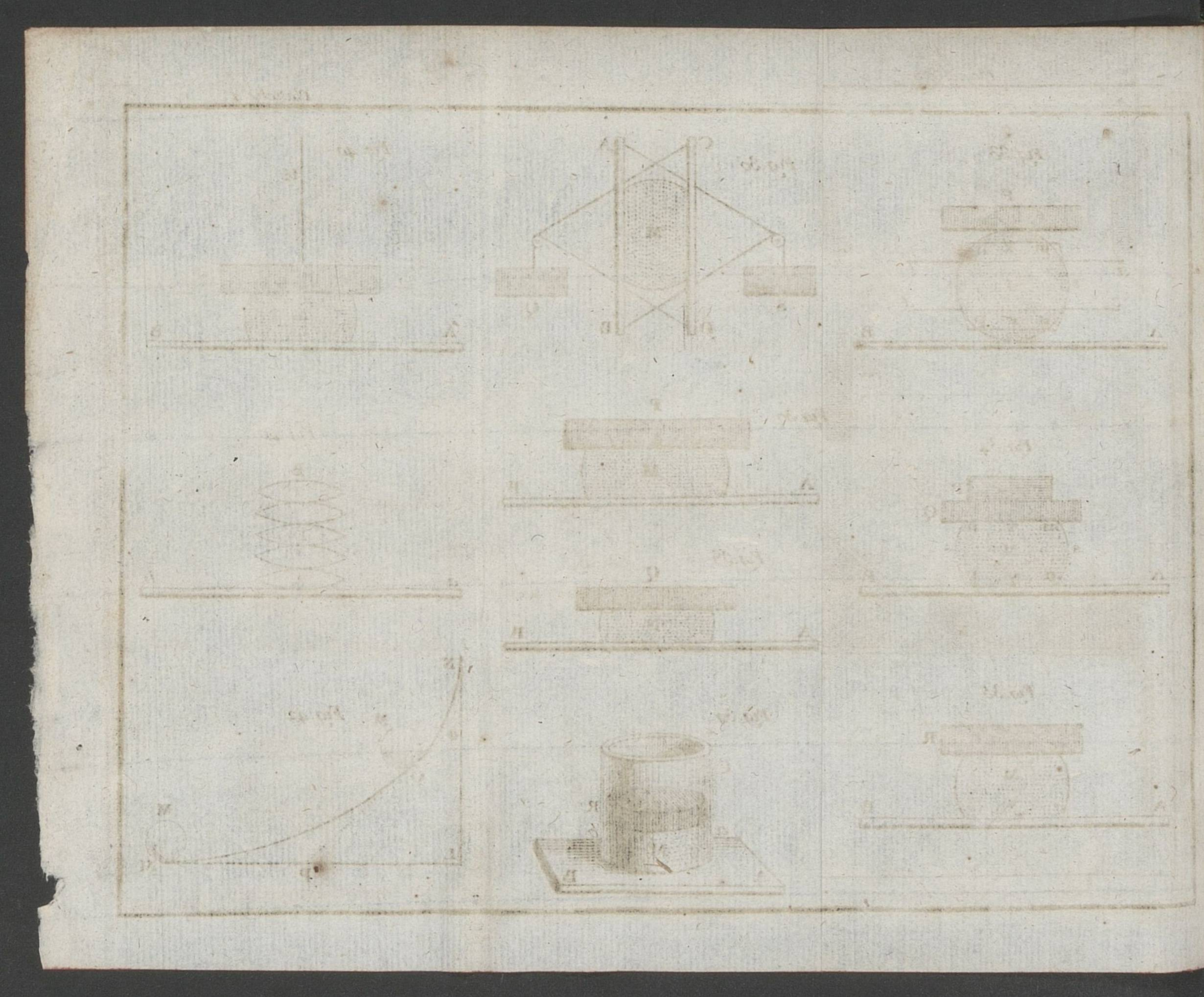


Planche 4.


Fig. 33
P
m x n
a b
s M s
c d
o y p
A B
Fig. 36
C A
M
S Q
D B
Fig. 40
H
M
A B
Fig. 37
P
M
A B
Fig. 41
B
D
A
a b
Fig. 34
P
Q
m x n
s M s
o y p
A B
Fig. 38
Q
N
A B
Fig. 35
R
M
y
A B
Fig. 39
C
R
a b
M
A B
Fig. 42
N
M
o
O
M
L
P
M



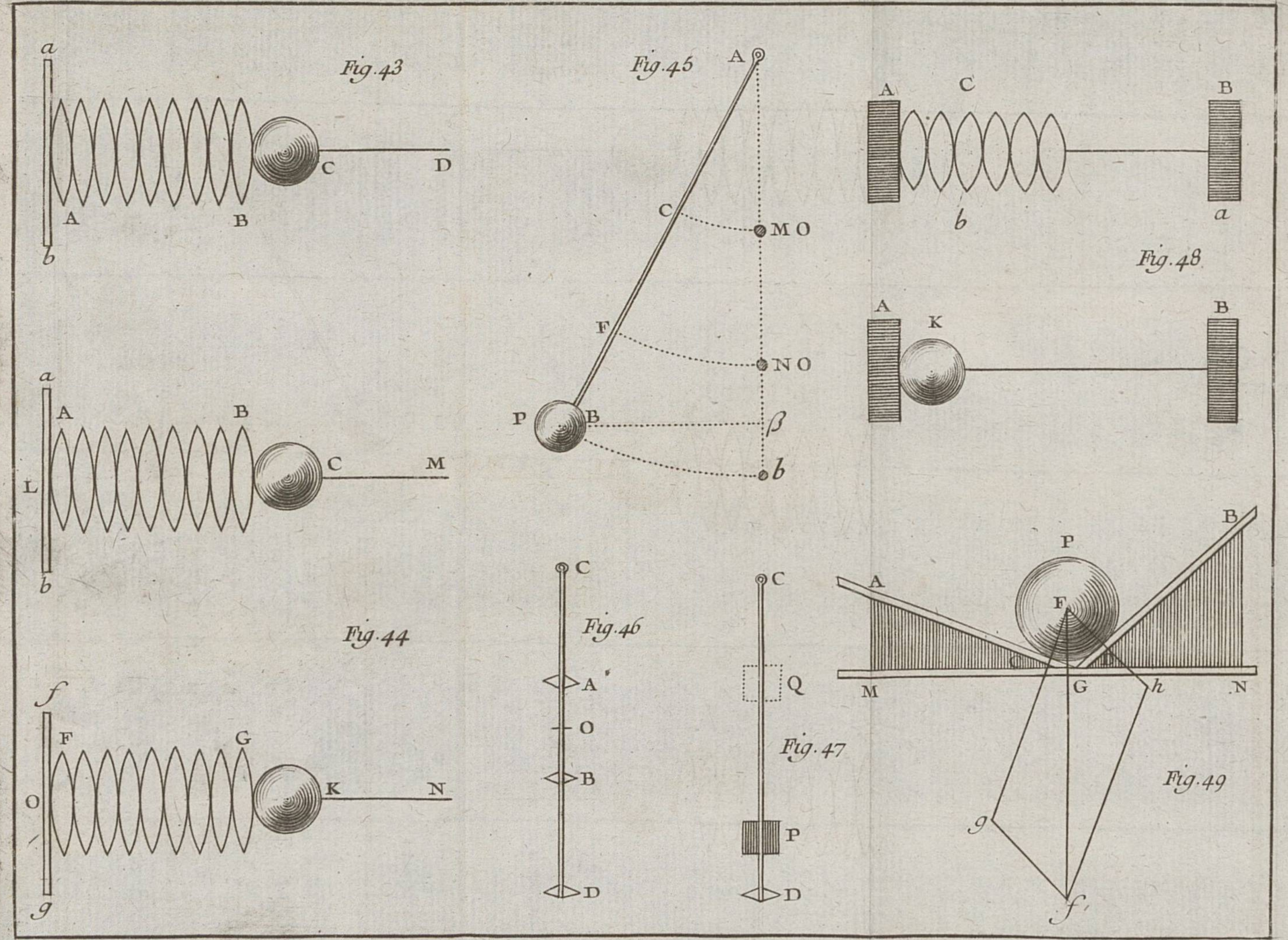


Fig. 43
a
A
B
C
D
b
Fig. 45
A
C
M O
F
N O
P
B
β
b
A
C
B
b
a
Fig. 48
A
K
B
a
A
B
L
C
M
b
Fig. 44
f
F
G
O
K
N
g
C
Fig. 46
A
O
B
D
C
Q
Fig. 47
P
D
B
P
A
F
M
G
h
N
Fig. 49
g
f

Planche 6.e

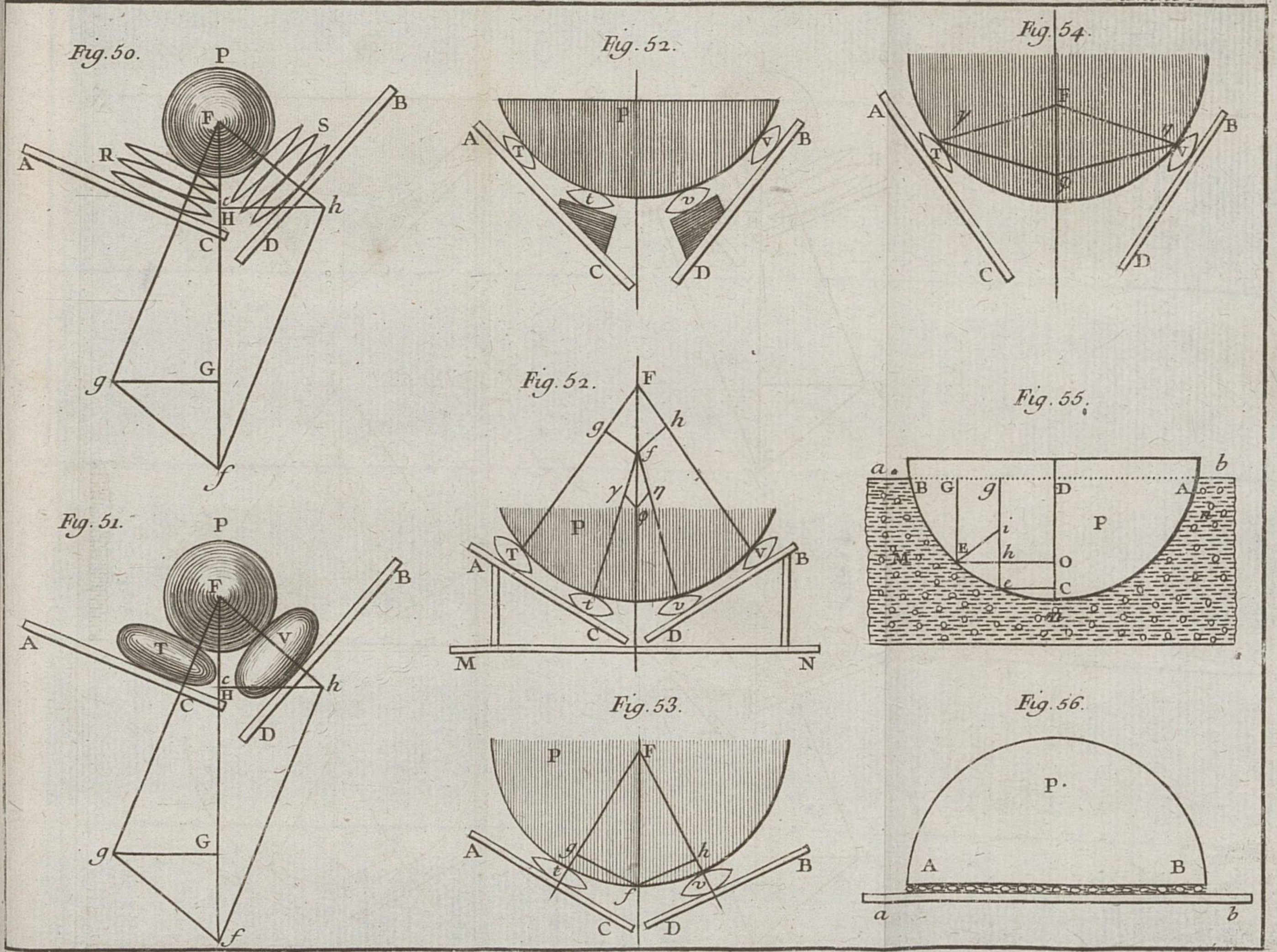


Fig. 50.
P
F
R
S
A
B
c
H
h
C
D
G
g
f
Fig. 51.
P
F
T
V
A
B
c
H
h
C
D
G
g
f
Fig. 52.
P
A
B
T
V
t
v
C
D
Fig. 52.
F
g
h
f
γ
η
φ
P
T
V
A
B
t
v
C
D
M
N
Fig. 53.
P
F
A
B
g
h
t
v
f
C
D
Fig. 54.
F
A
B
T
V
C
D
Fig. 55.
a
b
B
G
g
D
A
P
i
E
M
h
O
C
Fig. 56.
P.
A
B
a
b

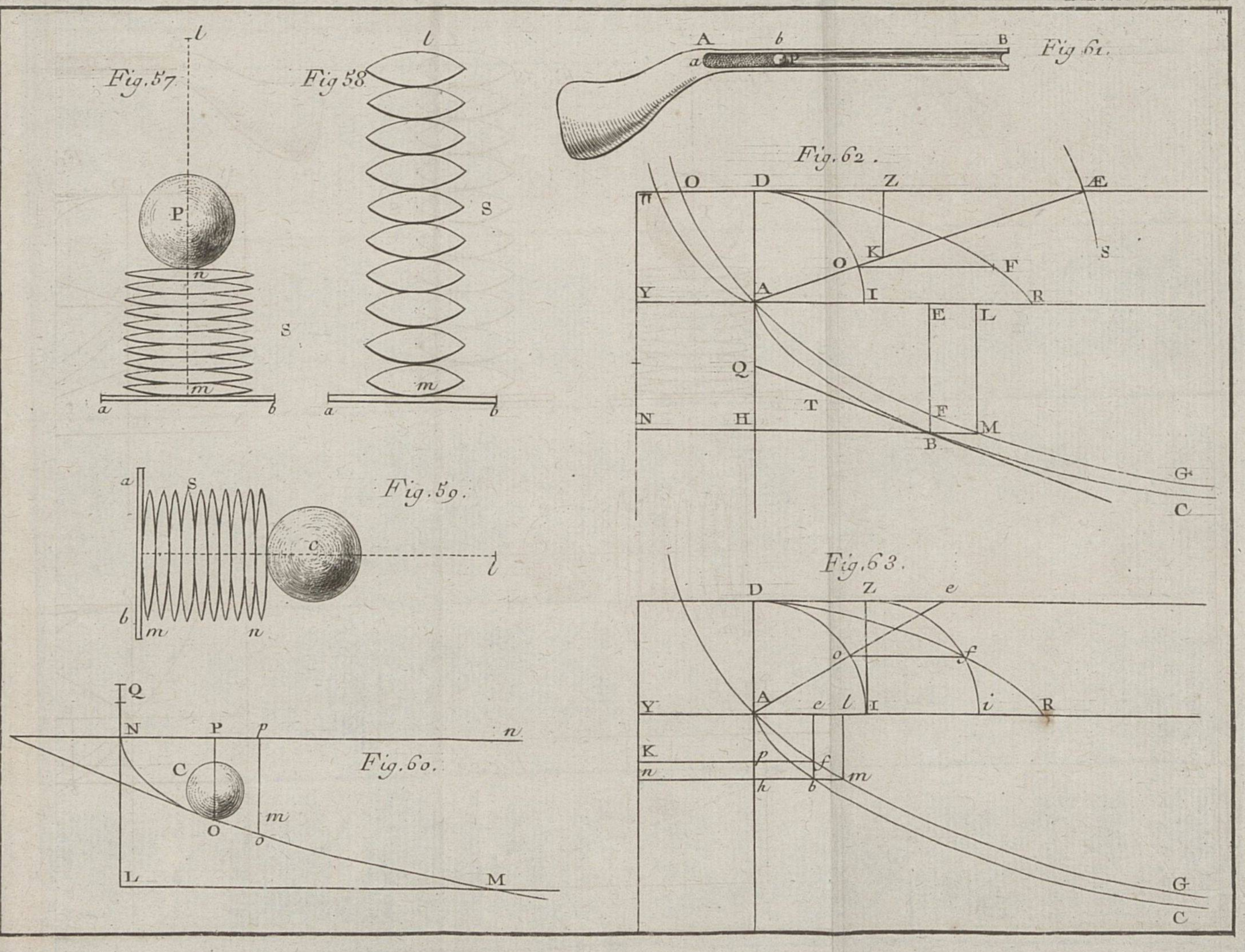
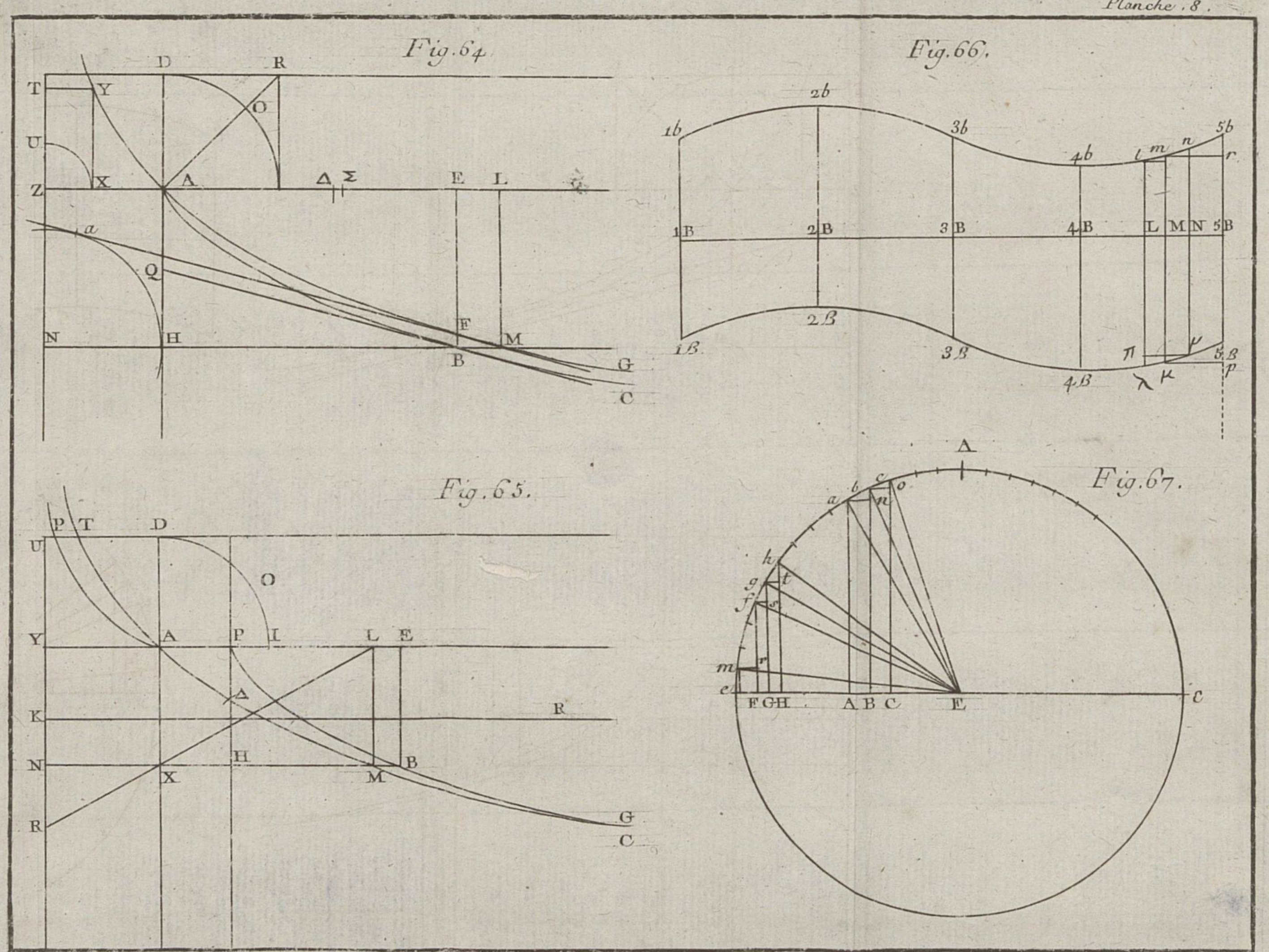
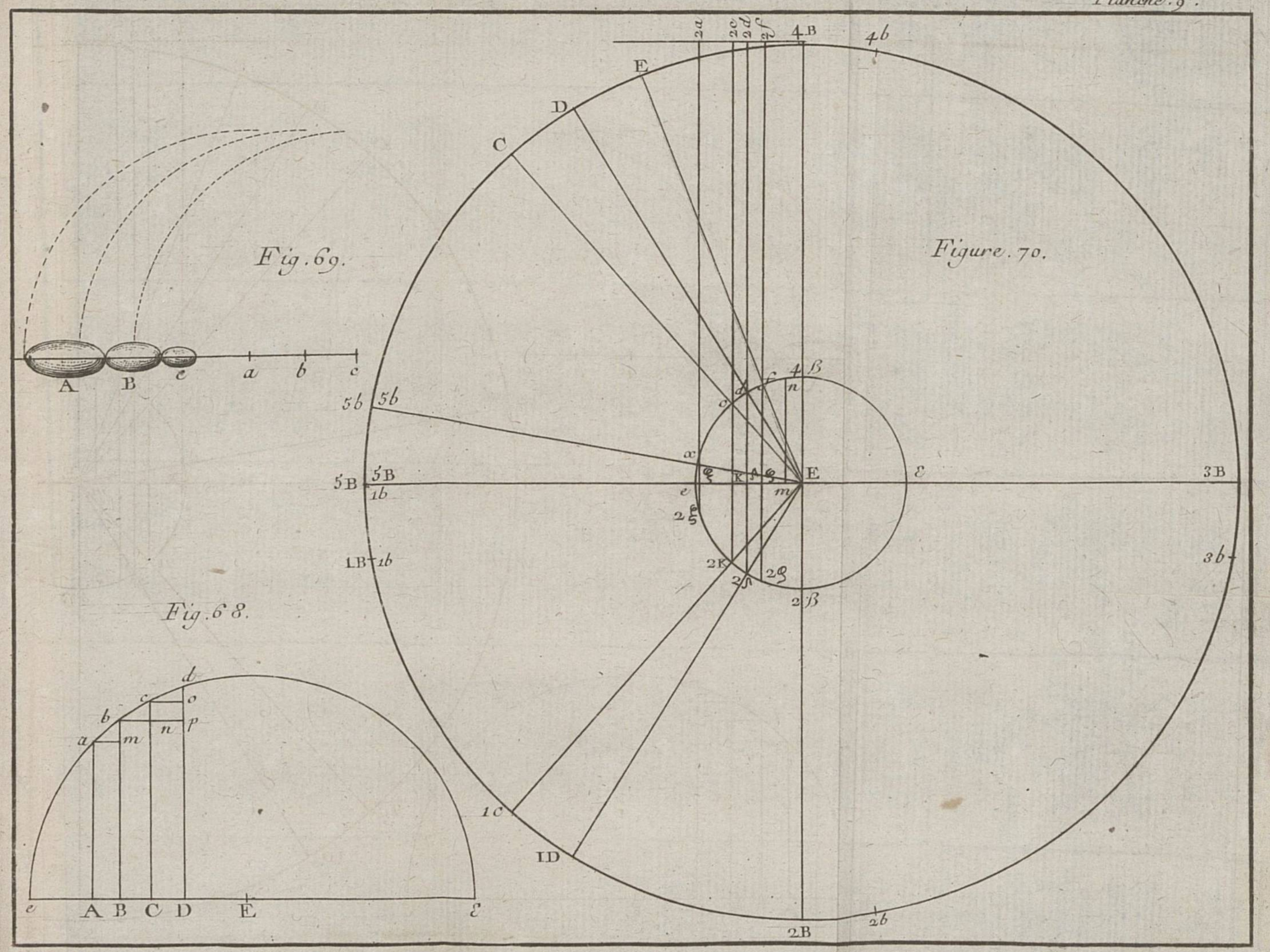
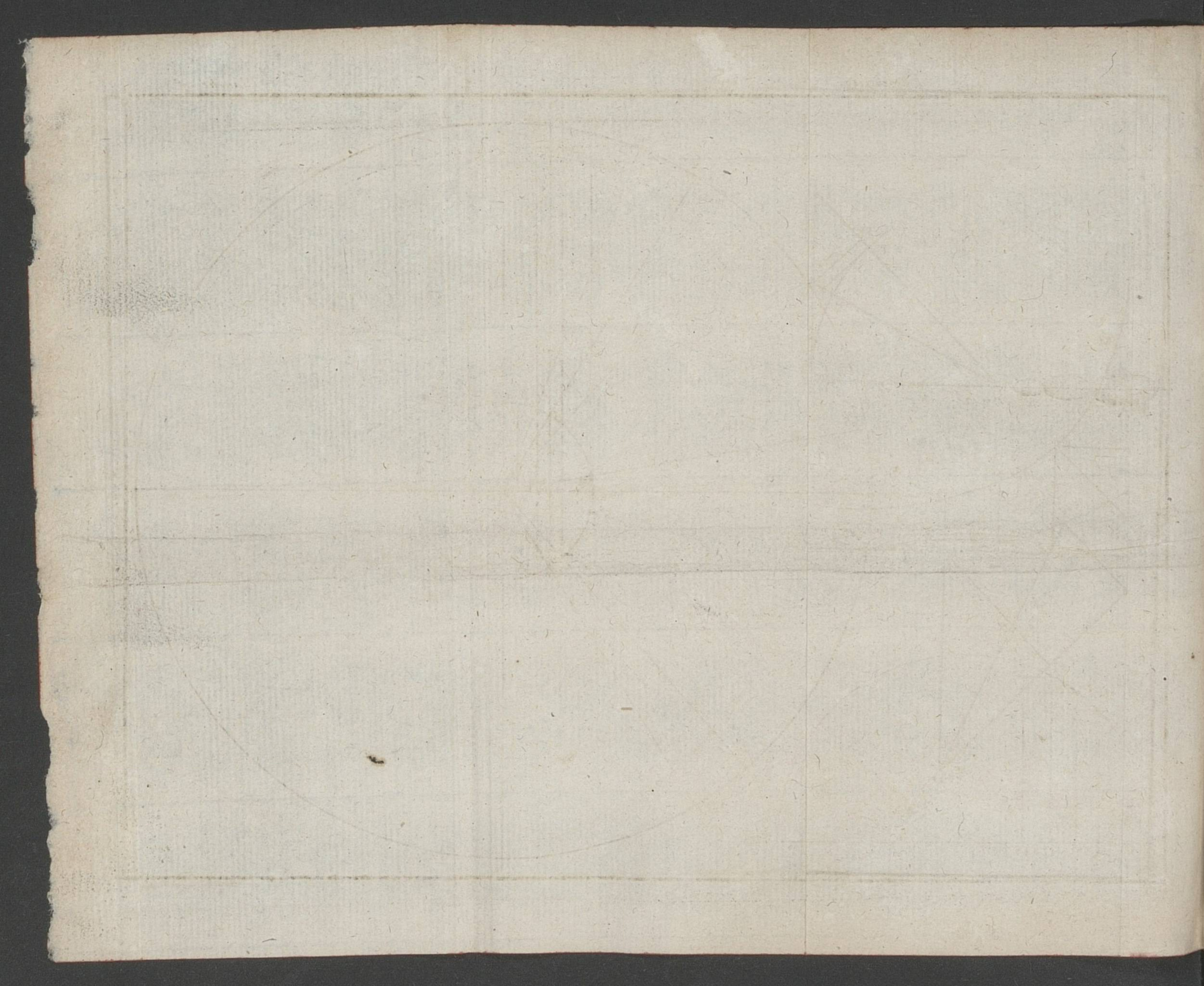


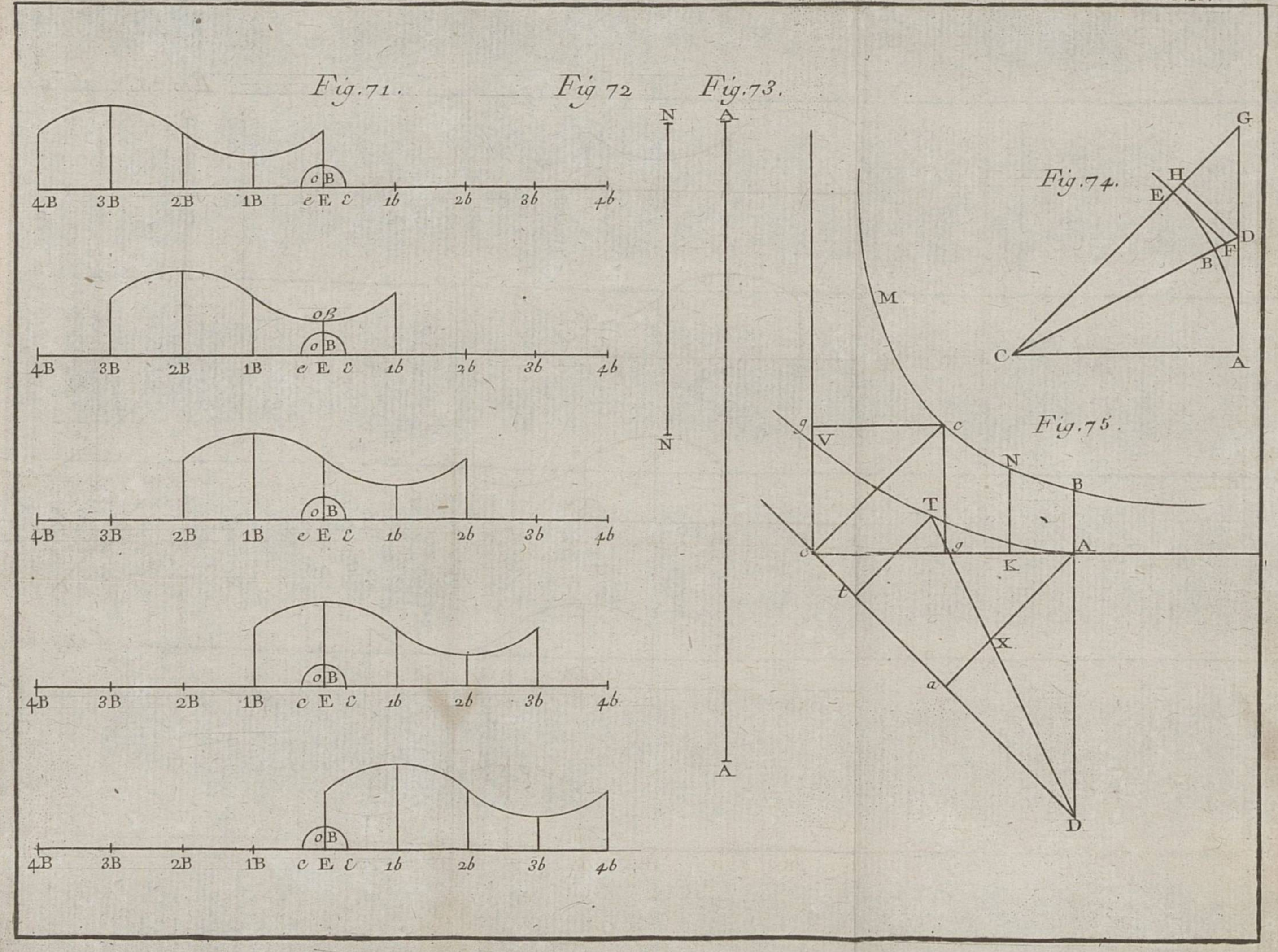
Fig. 57.
Fig 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig 61.
Fig. 62.
Fig. 63.

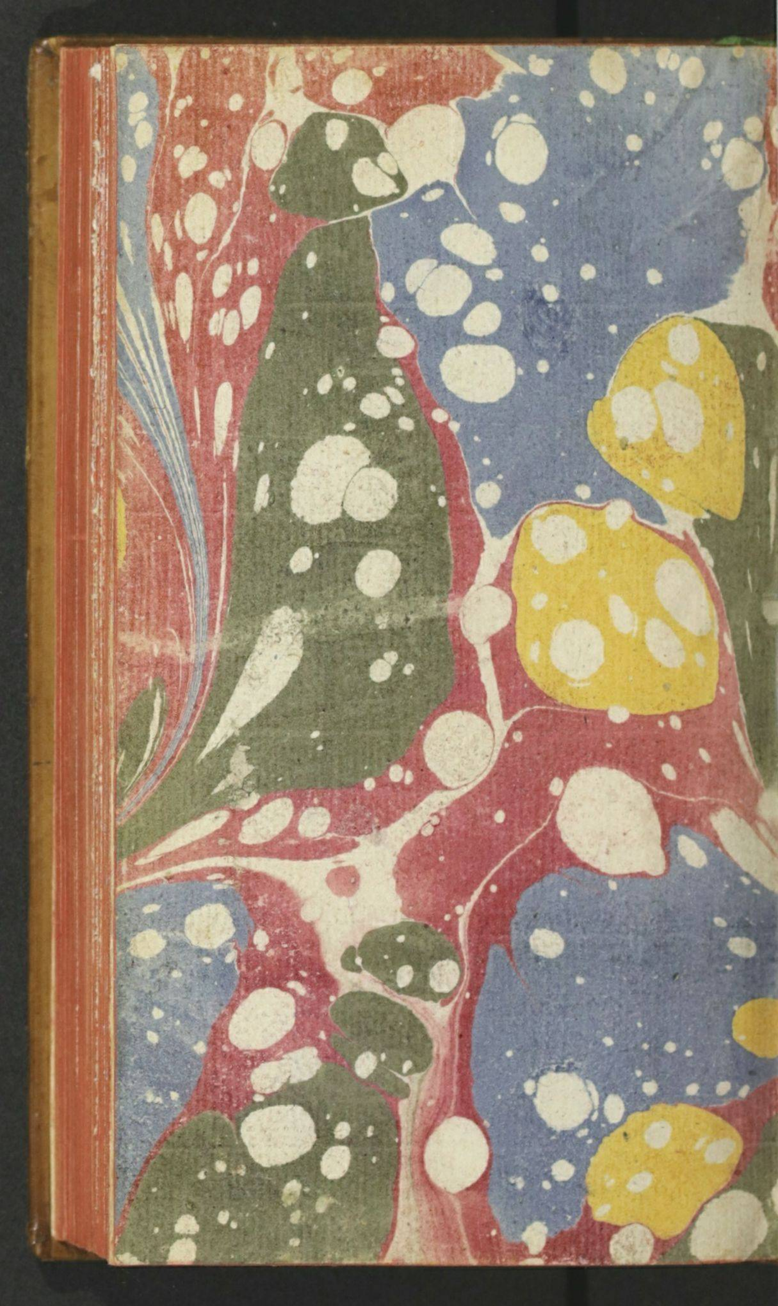
Planche. 8.


Fig. 64.
D R T Y O U Z X A Δ Σ E L a Q F N H M B G C
Fig. 66.
2b 1b 3b 5b 4b l m n r
1B 2B 3B 4B L M N 5B
2B 1B 3B π ρ 5B p 4B λ κ
Fig. 65.
P T D U O Y A P I L E Δ K R N H B X M R G C
Fig. 67.
A c o b a n h t g s f m r e F G H A B C E c

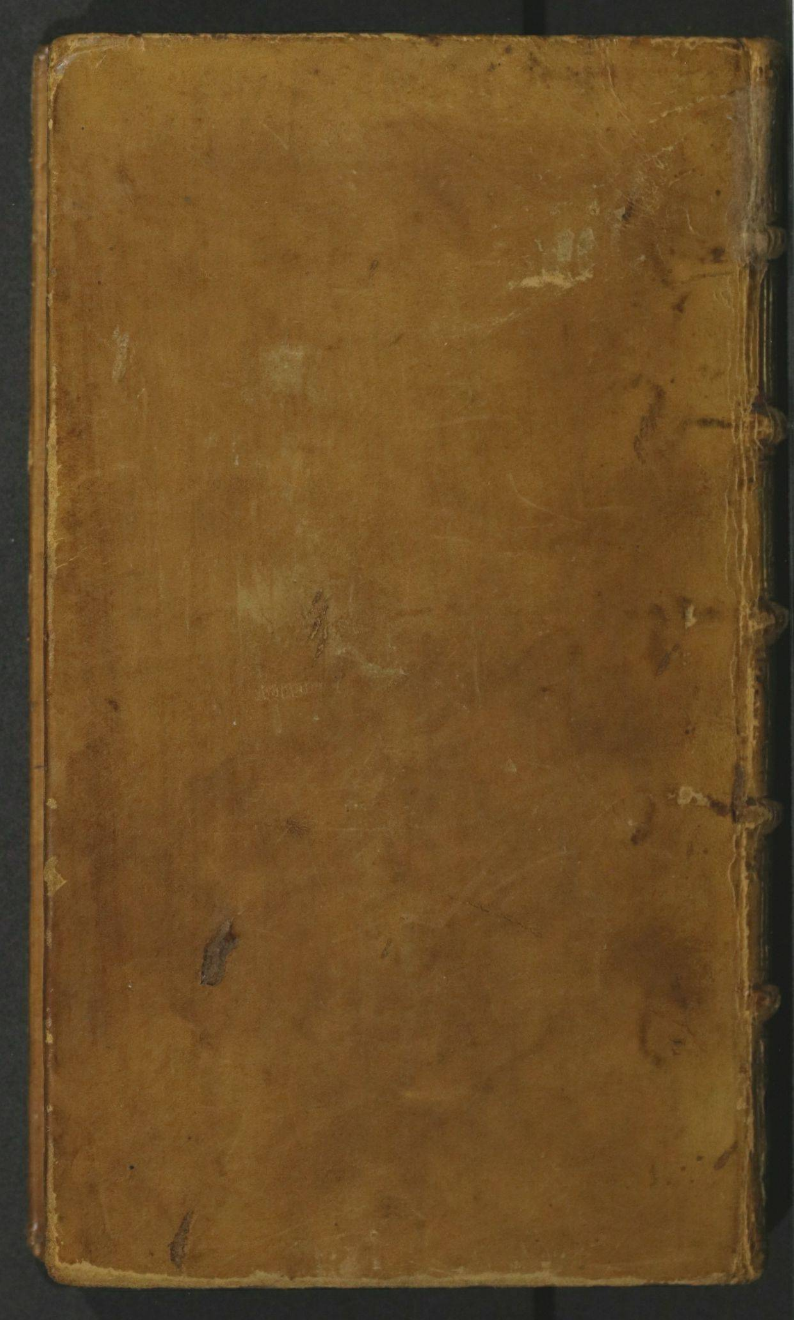

Fig. 69.
A
B
c
a
b
c
Figure. 70.
4B
4b
E
D
C
5b
5B
1b
1B
E
3B
3b
2B
2b
1C
1D
Fig. 68.
a
b
c
d
m
n
o
p
e
A
B
C
D
E




Fig.71.
Fig 72
Fig.73.
Fig.74.
Fig.75.
4B
3B
2B
1B
e E ε
oB
1b
2b
3b
4b
N
A
G
H
E
D
F
B
C
A
M
g
V
c
N
B
T
g
A
K
t
X
a
D








ESSAIS
DE
PHYSI

inches 4 3 2 1 0

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density ⟶										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams